УДК 372.851

Бодряков В.Ю., Ударцева Д.А

«КОНСТРУИРОВАНИЕ» И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ КАК СПОСОБ РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ОБЩЕЙ ШКОЛЫ

Аннотация

В статье рассмотрен подход к определению экстремальных (наибольших или наименьших) значений функции без использования техники дифференциального исчисления. «Конструирование» и решение задач оптимизации с использованием экстремальных свойств квадратичной функции представлено как способ развития творческих математических способностей учащихся основной общей школы (5-9 кл.). Проанализированы экстремальные свойства квадратичной функции, выявлены основные приемы решения экстремальных задач. Рассмотрен ряд задач, которые могут быть решены учениками, не изучавшими тему «Производная». Разработка может быть интересна практикующим школьным учителям, студентам педагогам-математикам, мотивированным учащимся.

Ключевые слова: квадратичная функция, развитие математических способностей, экстремум функции, методика преподавания математики, методика математики в школе, школьники.

Bodryakov V.Yu., Udartseva D.A.

"CONSTRUCTING" AND SOLVING THE OPTIMIZATION PROBLEMS WITH THE USE OF EXTREME PROPERTIES OF THE QUADRATIC FUNCTION AS A WAY TO DEVELOPE THE CREATIVE MATHEMATICAL ABILITIES OF PUPILS OF THE BASIC SCHOOL

Abstract

The approach to the definition of extreme (largest or smallest) values of a function without the use of the differential technique is considered in the article. "Constructing" and solving the optimization problems using extreme properties of the quadratic function is presented as a way to develop the creative mathematical abilities of pupils in the basic general school (5-9 cl.). Extremal properties of the quadratic function are analyzed, the basic methods for solving extremal problems are revealed. A number of problems that can be solved by pupils who have not studied the theme "Derivative" are considered. The approach may be of interest to practicing school teachers, students – future math teachers and motivated pupils.

Keywords: the quadratic function, development of mathematical abilities, extremum of a function, the methodology of teaching mathematics, the methodology of mathematics in school, schoolchildren.

В задачниках по математике для основной общей школы (5-9 классы) редко встречаются интересные содержательные задачи по нахождению экстремальных (наибольших или наименьших) значений функции (см., напр. [1]). Ученики этого возраста почти не решают в классе подобные задачи, а знакомятся с ними лишь в выпускных классах при изучении основ дифференциального исчисления. Так, в учебниках под ред. А. Г. Мордковича [12; 13] производная вводится во 2 полугодии 10 класса; в учебнике Никольского и др. [15] производная вводится в 1 полугодии 11 класса и т. д. К этому времени мотивация к изучению математики бывает безвозвратно утеряна [2; 10]. Между тем, по нашему глубокому убеждению, решение экстремальных задач может стать весьма эффективным инструментом формирования и развития творческих математических умений учащихся основной общей, а не только старшей, школы и их мотивации к углубленному изучению предмета. Разумеется, школьников следует «вооружить» математическими инструментами для решения оптимизационных задач различного уровня без преждевременного использования производной, а их будущих учителей – студентов педагогов-математиков научить методике «конструирования» и решения таких задач. Добавим, что математическое педагогическое сообщество активно призывает к более глубокому изучению способов решения задач на оптимизацию на разных ступенях образования. За многие годы коллективного труда наработан впечатляющий задачный и методический материал по теме как для обучающихся, так и для педагогов; задачи «на максимум/минимум» стали неотъемлемой частью обязательного ЕГЭ по математике (см., например, [3-9; 11; 14; 16-21] и др.). Выделим усилия отечественных [3; 4; 7; 8; 14] и зарубежных [22-24] педагогов, направленные на разработку и освоение педагогических подходов к творческому решению оптимизационных задач без использования производной; прежде всего, с использованием экстремальных свойств квадратичной функции (параболы). С учетом сказанного, актуальность темы исследования не вызывает сомнений.

Сказанное позволяет сформулировать и рабочую *гипотезу* исследования: творческое изучение и использование экстремальных свойств квадратичной функции позволит решать (научить решать), оптимизационные, и притом достаточно сложные, задачи в основной общей школе (когда учащиеся ещё не изучали методов исследования функций на экстремум с помощью производной).

Проведенные педагогические эксперименты подкрепляют гипотезу исследования. Так, авторы статьи [22] проводили эксперименты в школах с разными классами обучающихся (9-11 кл.). Для своих исследований они выбрали экстремальные задачи, которые ученики могли бы решить с разными уровнями знаний. В результате, школьники использовали множество различных методов для решения задач, применяя разные стратегии, в том числе и использование свойств квадратичной функции. Таким образом, по мнению авторов, различные решения для одной и той же задачи – это хорошая демонстрация связи между различными темами математики.

В статье [23] авторами был осуществлен анализ международных стандартов и разработано межнациональное исследование для изучения того, как тема квадратичной функции вводится в четырех странах: Карибском бассейне, Китае, Турции и США. Стандарты были проанализированы в трех измерениях: содержание, математическое мышление и когнитивный уровень. Результаты показали, что все стандарты вводят основополагающие понятия квадратичных функций, однако с различными процедурными и концептуальными ожиданиями. В сборнике [24] также затронута тема квадратичных функций и операций над ними. Разобраны основные понятия, свойства, графики и рассмотрены задачи, решаемые с использованием квадратичной параболы.

Напомним основные определения и факты, связанные с использованием квадратичной функции как инструмента решения задач на экстремум [5].

Функция называется квадратичной, в случае если её возможно задать формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b и c – некоторые действительные числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$. Областью определения D квадратичной функции (КФ) является вся числовая ось: $D = (-\infty, +\infty)$; множество значений E – луч: либо $E = (-\infty, y_{\max}]$, либо $E = [y_{\min}, +\infty)$. КФ удобно исследовать в виде, содержащим выделенный полный квадрат:

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Графиком КФ является квадратичная парабола $y = f(x)$ с обеими ветвями, направленными вверх или вниз.

Возможны два случая.

1) Если $a > 0$, то слагаемое $a(x + \frac{b}{2a})^2$ всюду положительно, и лишь при $x_0 = -\frac{b}{2a}$ обращается в нуль. Поэтому функция y имеет наименьшее значение $y_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$, и не имеет наибольшего, причем $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – единственная точка минимума.

2) Если $a < 0$, то уже наибольшее значение функции $y_{\max} = c - \frac{b^2}{4a}$ достигается при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а наименьшего значения не существует, и $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – единственная точка максимума.

Обобщенно наименьшее и наибольшее значения называются экстремальными значениями функции. Сказанное выше можно выразить в форме теоремы, являющейся основной для решения экстремальных задач с использованием свойств квадратичной без использования производной.

Теорема (*об экстремуме квадратичной функции*). Экстремальное значение квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ достигается в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Значение является наименьшим, если $a > 0$, и наибольшим, если $a < 0$.

<u>Доказательство</u>: Доказательство утверждения вполне посильно школьникам и его следует предоставить самим обучающимся.

Из теоремы об экстремуме квадратичной функции вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Пусть сумма n ($n \in N$) слагаемых постоянна, тогда их произведение будет наибольшим, когда они равны.

Следствие 2. Пусть произведение n ($n \in N$) множителей постоянно, тогда их сумма будет наименьшей, когда они равны.

Эти факты часто используется при решении экстремальных задач.

Проиллюстрируем на примерах возможности применения экстремальных свойств квадратичной параболы для решения оптимизационных задач.

Задача 1. Найдите наибольшее значение функции

$y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3$.

Решение: Поскольку функция $y = \log_5 x$ является монотонно возрастающей, то она достигает наибольшего значения в той точке, в которой достигает наибольшего значения выражение, стоящее под знаком логарифма. Квадратный трехчлен с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае, в точке $x_0 = -1$. Значение функции в этой точке $y_{max} = y(x_0) = \log_5(4 - 2(-1) - (-1)^2) + 3 = 4$.

Ответ: 4.

Задача 2. Найти наименьшее значение выражения $f(x; y) = x^2 + 5y^2 + 4xy + 6y + 10$.

Решение: Будем считать значение y фиксированным.

Тогда наименьшее значение данной квадратичной функции $f(x, y) = x^2 + 4yx + (5y^2 + 6y + 10)$ достигается при x, равном абсциссе вершины параболы $x_0 = -\frac{4y}{2} = -2y$, и равно $f(-2y) = y^2 + 6y + 10$. Теперь находим наименьшее значение функции $f(x, y) = y^2 + 6y + 10 = (y-3)^2 + 1$, которое теперь равно $f(x = -6, y = 3) = 1$.

Ответ: 1.

Комментарий. Данную задачу на поиск экстремума функции двух переменных удалось свести к последовательному поиску экстремумов двух функций от одной переменной, и легко решить.

Задача 3. Пусть x – числовое значение некоторой неизвестной величины, которое мы хотим определить насколько возможно точнее с помощью какого-либо измерительного инструмента. Пусть произведено n измерений и получены результаты: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Какое значение следует приписать величине x в качестве заслуживающего наибольшего доверия? Гауссом было предложено брать такое значение x, при котором так называемое «тотальное» отклонение y было бы минимальным (метод наименьших квадратов, МНК).

Итак, найдите x, при котором величина $y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ принимает наименьшее значение.

Решение: Сложим равенства

$$(x - x_1)^2 = x^2 - 2xx_1 + {x_1}^2,$$
$$(x - x_2)^2 = x^2 - 2xx_2 + {x_2}^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(x - x_n)^2 = x^2 - 2xx_n + {x_n}^2,$$

и получим

$$y = nx^2 - 2x(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2).$$

Следовательно, y является квадратным трехчленом относительно x, он принимает наименьшее значение при $x = \frac{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{2n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

<u>Ответ</u>: $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Комментарий. Трудно переоценить практическую важность данной задачи. Метод наименьших квадратов является одним из наиболее важных и используемых современных инструментов обработки экспериментальных данных, – от школьного лабораторного опыта до астрономических наблюдений.

Задача 4. Имеется проволока длины l. Требуется согнуть её так, чтобы получился прямоугольник, ограничивающий наибольшую возможную площадь.

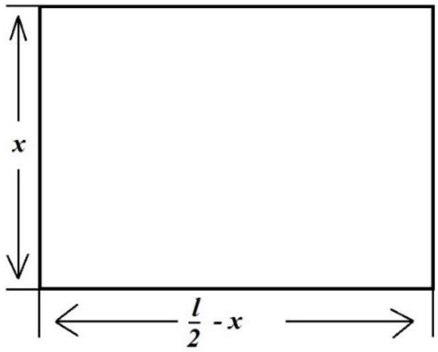

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 4

<u>Решение</u>: Введем обозначения x и $\frac{1}{2}l - x$ для сторон прямоугольника (рис. 1). Как и следует, $2(x + (\frac{1}{2}l - x)) = l$.

Площадь $S = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$, или $S = -x^2 + \frac{l}{2}x$. Эта функция принимает своё наибольшее значение при $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{l}{4}$. Т.е., значение длины одной из сторон будет равно $x = \frac{l}{4}$. Тогда и другая сторона данного прямоугольника будет равна $\frac{l}{2} - x_0 = \frac{l}{4}$. Оказалось, что прямоугольник наибольшей площади при заданном периметре есть ни что иное, как квадрат.

<u>Ответ</u>: прямоугольником, обладающим наибольшей площадью при заданном периметре является квадрат со стороной $x = \frac{l}{4}$.

Комментарий. Данная задача принадлежит к классу оптимизационных изопериметрических задач, т.е. задач с заданным фиксированным периметром некоторой фигуры. Площадь прямоугольника $S = x \cdot y$ зависит от двух переменных, но наличие дополнительного ограничения в виде заданного периметра позволило свести задачу к поиску экстремума квадратичной функции только от одной переменной.

Задача 5. Дан квадрат *ABCD* (рис. 2). От его вершин отложены равные отрезки *Aa, Bb, Cc, Dd* и точки *a, b, c, d* соединены прямыми. При каком значении *Aa* площадь квадрата *abcd* окажется наименьшей?

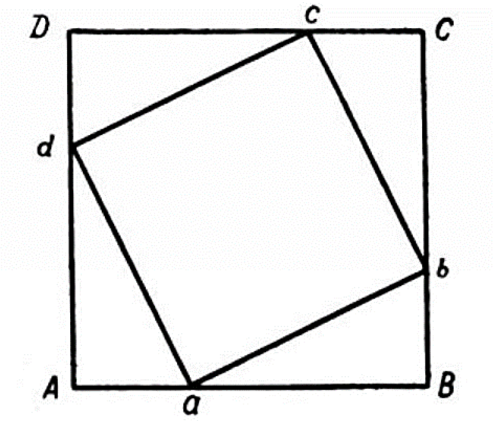

Рис. 2. Иллюстрация к задаче 5

Решение. Обозначим отрезок $Aa = x$. Тогда $Ab = l–x$.

По теореме Пифагора получаем:

$$|ab|^2 = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2.$$

Площадь квадрата *abcd* также равна $|ab|^2$. Значит, $S = 2x^2 - 2lx + l^2$. Тогда наименьшее значение площади S будет достигнуто при $x_0 = \frac{l}{2}$. Иными словами, точки *a, b, c* и *d* необходимо поставить в середины сторон квадрата *ABCD*.

Ответ: Площадь квадрата *abcd* будет наименьшей при $Aa = x = \frac{l}{2}$.

Задача 6. В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение: Задача с дополнительным ограничением: прямоугольник должен быть вписан в круг. Хотя задача не является одномерной (зависящей от одной переменной *x*), но благодаря ограничению может быть сведена к таковой.

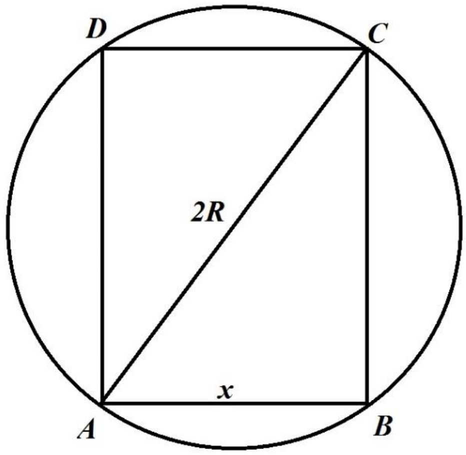

Рис. 3. Иллюстрация к задаче 6

Пусть радиус круга равен *R*, а сторона *AB* прямоугольника равна *x* (рис. 3). Применяя теорему Пифагора, получим $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Тогда площадь искомого прямоугольника может быть выражена по формуле $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

Функции $y = S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ и $y^2 = S^2 = x^2(4R^2 - x^2)$ достигают своего наибольшего значения при одном и том же x.

Пусть $x^2 = z$, тогда

$y = z(4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2 z.$

Таким образом, наибольшее значение функции достигается при $z = 2R^2$ или $x = R\sqrt{2}$.

Заметим, что при $AB = x = R\sqrt{2}$ сторона BC будет равна $R\sqrt{2}$, то есть, вписанный в данный круг прямоугольник наибольшей площади представляет собой квадрат.

Ответ: Вписанный в круг прямоугольник наибольшей площади представляет собой квадрат со стороной $x = R\sqrt{2}$.

Далее рассмотрим ряд задач на применение следствий из теоремы.

Задача 7. Какой из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих одинаковую сумму длин всех ребер, имеет наибольший объем?

Решение. Обозначим ребра параллелепипеда за *x, y, z,* тогда *V=xyz*, таким образом необходимо узнать, при каких условиях произведение *xyz* будет являться максимальным.

Из того, что числовые множители не влияют на условие максимума произведение, то будем находить условия максимума произведения $4x \cdot 4y \cdot 4z$.

Из условия задачи нам известно, что сумма множителей $4x + 4y + 4z$ постоянна. Тогда по следствию 1 имеем, что искомый максимум будет известен тогда, когда $4x = 4y = 4z$, то есть $x = y = z$. А это означает, что параллелепипед, удовлетворяющий требованиям задачи, является кубом.

Ответ: куб.

Задача 8. Найти максимум произведения *xyz*, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Произведение *xyz* принимает максимальное значение в том же случае, что и $\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}$, поэтому найдём максимум этого произведения.

Из условия $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, тогда по следствию 1 выполняется равенство $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ или $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Отсюда следует, что произведение *xyz* имеет максимум равный

$$max(xyz)=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{abc}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}abc}{9}.$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\sqrt{3}abc}{9}$.

Задача 9. При каком значении *t* произведение *xy* принимает наибольшее значение, если *x, y, t* являются действительными числами и

$$\begin{cases} x=t^2 \\ \frac{1}{y}=t^4+4. \end{cases}$$

Решение. Так как

$$\begin{cases} x=t^2 \\ \frac{1}{y}=t^4+4, \end{cases}$$

Тогда $xy=\frac{t^2}{t^4+4}$.

Таким образом, необходимо найти *t*, такое, что $\frac{t^2}{t^4+4}$ будет принимать наибольшее значение, а это будет выполняться, если $\frac{t^4+4}{t^2}$ будет принимать наименьшее значение.

$$\frac{t^4+4}{t^2}=t^2+\frac{4}{t^2},$$

но так как произведение $t^2\left(\frac{4}{t^2}\right)=4$, то по следствию 2 получаем условие минимума:

$$t^2=\frac{4}{t^2},$$

$$\frac{t^4-4}{t^2}=0,$$

$$t=\pm\sqrt{2}.$$

Тогда наибольшим значением произведения *xyz* будет являться:

$$\max(xyz)=\left(\pm\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\pm\sqrt{2}\right)^4+4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: произведение *xyz* при $t=\pm\sqrt{2}$ будет принимать наибольшее значение, равное $\frac{1}{4}$.

Таким образом, решенные задачи полностью подтверждают выдвинутую гипотезу. Хоть и в дифференциальном исчислении существует специальный способ решения экстремальных задач, большинство из них может быть решено элементарными методами, в нашем случае, с помощью свойств квадратичной параболы. Данный способ на уроках и факультативах может убедить учащихся в том, что нахождение наибольших и наименьших значений с помощью квадратичной функции является одним из простых и доступных методов решения. На основании шаблонов приведенных задач можно конструировать и другие задачи, аналогичного содержания, при этом могут быть широко задействованы межпредметные связи математики с физикой, информатикой и другими предметами естественно-научного цикла. Важную роль играют практико-ориентированные оптимизационные задачи (ресурсо- и энерго-сбережение, экология и др.).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2009. 271 с.

2. Бодряков В. Ю., Воронина Л. В. Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения // Педагогическое образование в России. 2018. № 2. С. 15-27.

3. Буслаева И. П. Решение экстремальных задач без использования производной // Математика в школе. 1995. № 5. С. 67-70.

4. Генкин Г. З. Задачи на нахождение экстремумов функций в VIII классе [с помощью классических неравенств] // Математика в школе. 2003. № 9. С. 51-54.

5. Готман Э. Г. Поиск рационального решения задачи на экстремум // Математика в школе. 1997. № 6. С. 40-43.

6. Демидович В. Б. Экстремальные задачи // Математика в школе. 2000. № 8. С. 56-59.

7. Епифанова Т. Н. Отыскание экстремальных значений функции различными способами // Математика в школе. 2004. № 4. С. 52-54.

8. Крачковский С. М. Вариативность подходов к задачам на экстремальные значения // Математика в школе. 2018. № 1. С. 19-32.

9. Жмурова И. Ю., Генералова А. А. Оптимизационные задачи в школьном курсе математики // Молодой ученый. 2016. № 14. С. 537-539. URL: https://moluch.ru/archive/118/32649/ (дата обращения: 14.04.2018).

10. Кузовкова А. А., Мамалыга Р. Ф., Бодряков В. Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. 2018. № 2. С. 35-42.

11. Михайлов Е. А. Задачи оптимизации в школе // Библиотека «МГУ-школе». URL: http://lib.teacher.msu.ru/pub/3021 (дата обращения: 14.04.2018)

12. Мордкович А. Г. (ред.). Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. М.: Мнемозина, 2009. Часть 1: Учебник (базовый уровень). 399 с.

13. Мордкович А. Г. (ред.). Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. М.: Мнемозина, 2009. Часть 2: Задачник (базовый уровень). 239 с.

14. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. С. 10-17.

15. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра и начала анализа. 11 класс. Учебник (базовый и профильный уровни). М.: Просвещение, 2009. 464 с.

16. Писаревский Б. М. Задачи об экстремумах // Математика в школе. 2004. № 5. С. 47-51.

17. Рыб К. А., Бодрякова Н. О. Физические задачи на экстремум функции // Математика в школе. 1993. № 3. С. 15-20.

18. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика (профильный уровень). URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 14.04.2018).

19. Сорокин Г. А. Экстремум и неравенства // Математика в школе. 1997. № 1. С. 76-81.

20. Фоминых Ю. Ф. Экстремумы // Математика в школе. 2000. № 4. С. 64-67.

21. Чучаев И. И., Мещерякова С. И. Уравнения и неравенства с параметром и задачи на экстремум // Математика в школе. 1994. № 4. С. 56-59.

22. Tünde Kántor, András Kovács. First steps in cooperative learning // math.ku.sk. URL: http://math.ku.sk/data/portal/data/zbornik2007/Articles/Kantor_Tunde-Kovacz_Andras.pdf (дата обращения: 14.04.2018).

23. Tuyin An, Alexia Mintos, and Melike Yigit. A cross-national standards analysis: quadratic equations and functions // cerme8.metu.edu.tr. URL: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG11/WG11_Yigit.pdf (дата обращения: 14.04.2018).

24. Quadratic functions and operations on functions // www.nsd.org. URL: https://www.nsd.org/site/handlers/filedownload.ashx?moduleinstanceid=75350&dataid=74981&FileName=PC%20CH3%20Student%20Ed.pdf (дата обращения: 14.04.2018).