УДК 515.142

Блинова Т.Л., Гаянов Т.И.

ПРЕИМУЩЕСТВО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ КООРДИНАТНЫМ МЕТОДОМ НАД АНАЛИТИКО-СИНТЕТИЧЕСКИМ

Аннотация

В данной статье обосновывается преимущество доказательства теорем и решения задач на доказательство методом координат. Для этого проводится краткий теоретический обзор координатного и аналитико-синтетического методов доказательства различных математических утверждений. Далее одна задача на доказательство решается с помощью обоих методов, проводится анализ каждого решения на основе выделения математических фактов, использование которых необходимо для успешного доказательства как для первого метода, так и для второго, а также их сравнение по количеству. На основании исследования делается обоснованное заключение о том, что координатный метод является менее затратным по времени и по необходимым умственным усилиям, чем аналитико-синтетический.

Ключевые слова: доказательства теорем, методы доказательства, задача на доказательство, метод координат, аналитико-синтетический метод.

Blinova T.L., Gayanov T.I.

ADVANTAGE OF PROVING THEOREMS BY COORDINATE METHOD INSTEAD OF ANALYTICAL-SYNTHETIC METHOD

Abstract

This article is dedicated to substantiation of advantage of proving theorems and solving proof tasks by coordinate method. For this purpose, there was done the short theoretical review of coordinate and analytical-synthetic methods of proving different statements. Then the same mathematical task was solved by both methods and there was completed analysis of each solvation, based on the extracting the mathematical facts, which are needed for successful proof. The number of these facts for every method were compared. Based on the research, in the end there was made substantial conclusion about the reason why coordinate method of proving of the theorems saves more time and intellectual power rather than analytical-synthetic method.

Keywords: proofs of theorems, methods of proving, proof task, coordinate method, analytical-synthetic method.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В современной математике как абстрактно-дедуктивной науке ни одно утверждение, которое не опирается на принятые аксиоматики и не обосновано логически, не считается достоверным и применимым в различных исследованиях. Поэтому доказательство гипотез и теорем до сих пор является одним из важнейших аспектов функционирования математики и наиболее приоритетным направлением в обучении математике в школе.

Заявленный тезис также находит отражение в ФГОС среднего общего образования [5, п. 9.5], так как согласно данному нормативному акту, одними из предметных результатов обучения математике (на углублённом уровне) в школе должны являться:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач.

Тем не менее, доказательство теорем является одной из наиболее сложных задач для обучающегося средней школы. Для этого ему нужно обладать необходимыми математическими знаниями и уметь соотносить их с поставленной задачей, а также максимально эффективно строить стратегию рассуждения, применяя уместные методы и приёмы доказательства. Необходимость в формировании у школьников вышеперечисленных умений также тесно связана с освоением метапредметных результатов, прописанных в ФГОС [5, п. 7.1], согласно которому в результате освоения основной образовательной программы у обучающегося должны быть сформированы:

1) умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

2) владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

Как было упомянуто ранее, доказательство теорем для обучающихся средней школы является крайне сложным моментом, так как в рамках данного процесса большинство из них сталкиваются со следующими проблемами:

1) не всегда в доказательстве теоремы легко проследить пути доказательства и тем более обнаружить наиболее эффективный из них;

2) зачастую на самостоятельный поиск и непосредственное доказательство теоремы уходит достаточно большое количество времени;

3) многие теоремы (особенно, геометрические) требуют введения дополнительных элементов, параметров или же построения дополнительных фигур, подбор которых также не всегда является очевидным.

Обобщая всё сказанное, сформулируем проблему исследования следующим образом: почему доказательство теорем (а также решение задач на доказательство) методом координат имеет преимущество доказательством аналитико-синтетическим методом? Для её решения мы проведём краткий обзор теоретических сведений о методах доказательства теоремы, решим конкретную задачу на доказательство с помощью обоих методов, проведём сравнительный анализ доказательств по количеству математических фактов, которые обучающийся должен знать и применить в рассуждениях, а затем на основе проведённых рассуждений сделаем соответствующие выводы.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ

Математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства, называют теоремой [1, с. 8]. Способ связи аргументов от условия к заключению суждения называют методом доказательства [2, с. 82]. Согласно Г. И. Саранцеву [3, с. 134] и В.А. Далингеру [1, с. 20, 31] в школьном курсе математики можно выделить две категории методов доказательства теорем: общематематические и специальные (частные).

В рамках общематематических методов оба автора выделяют синтетический и аналитический методы. Суть синтетического метода состоит в том, что цепочка рассуждений при доказательстве идёт от условия теоремы к её заключению. Аналитический метод характерен тем, что к заключению теоремы подбирается некоторая конфигурация условий (заведомо истинных), для выполнения которых необходимо непосредственно условие самой теоремы.

Тем не менее, очевидно, что осуществление доказательства теоремы строго по одному из приведённых методов является крайне проблематичным и неэффективным подходом. Поэтому, согласно Г. И. Саранцеву, «реальный процесс доказательства осуществляется по третьему пути, являясь аналитико-синтетическим» [3, с. 134], который он в своих исследованиях также называет «приёмом последовательного преобразования то условия, то заключения утверждения» [3, с. 134]. Аналогичную мысль высказывает Е. А. Суховиенко: «Наиболее общим и плодотворным является такое соединение анализа с синтезом, при котором мы совершаем в рассуждении попеременное движение с двух сторон: от данных к искомому (синтез) и от искомого к данным (анализ), пока полученные утверждения не сблизятся настолько, чтобы осуществить догадку» [4, с. 31]. Строго говоря, суть данного метода можно примерно описать следующим образом: в теореме условие и заключение преобразовывают в заведомо истинные утверждения до тех пор, пока преобразованное условие не совпадёт с преобразованным заключением. В дальнейшем ходе исследования на будет интересовать именно аналитико-синтетический метод доказательства теоремы.

Из специальных методов мы выделим метод координат. Его суть описывается следующим образом: задавая на евклидовой плоскости (в пространстве) прямоугольную систему координат мы устанавливаем взаимооднозначное соответствие между точкой и парой (тройкой) действительных чисел, что позволяет на рассматривать геометрические объекты с помощью алгебраических выражений (уравнений, неравенств и их систем), соответственно, доказывать геометрические утверждения алгебраическими методами.

Использование координатного метода при доказательстве утверждения предполагает выполнение трёх этапов:

1) перевод задачи на координатный язык;

2) преобразование полученных аналитических выражений;

3) обратный перевод с координатного языка на язык задачи.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится словарь для перевода теоремы с геометрического языка на язык координат. Мы сделаем его по аналогии со словарём, предлагаемым Г. И. Саранцевым [3, с. 150], но укажем в нём только те пункты, которые будут отражены по ходу исследования, и оформим его в виде таблицы:

Таблица 1.

Словарь метода координат (для плоскости)

Язык геометрии	Язык координат
Длина отрезка AB	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$
Отрезки AB и CD перпендикулярны	$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) = 0$ где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, $D(x_4;y_4)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ $\overrightarrow{CD} = (x_4 - x_3; y_4 - y_3)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АНАЛИТИКО-СИНТЕТИЧЕСКИМ И КООРДИНАТНЫМ МЕТОДАМИ

Для дальнейшего обоснования того, что наиболее эффективным метод координат имеет существенное преимущество над синтетическим при доказательстве теоремы как по временным, так и по интеллектуальным затратам, решим задачу на доказательство обоими вариантами. Задача звучит так: «Дана равнобедренная трапеция *ABCD*, верхнее основание *BC* которой вдвое меньше нижнего основания. Из вершин *B* и *C* трапеции проведены отрезки, перпендикулярные боковым сторонам, которые пересекаются в точке *O*. Доказать, что *AO* = *CO*». Чтобы не противоречить предыдущим рассуждениям, сразу оговоримся, что данную задачу в случае необходимости легко сформулировать в виде теоремы.

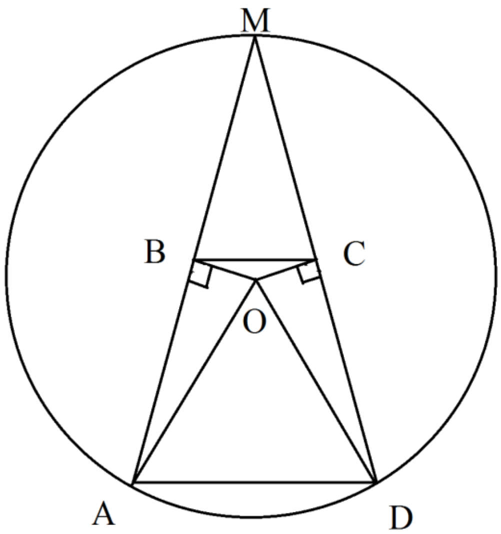

Рис. 1. Чертёж для синтетического доказательства

В первую очередь сконструируем чертёж для решения задачи аналитико-синтетическим методом (рис. 1) и продемонстрируем его применение.

В первую очередь проведём дополнительное построение: продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке M. Так как $\angle A = \angle D$ (трапеция – равнобедренная), сделаем вывод, что треугольник AMD – равнобедренный. Далее заметим, что BC – средняя линия треугольника AMD, так как по условию задачи она параллельна основанию AD ($ABCD$ – трапеция) и равна её половине. Также учитывая, что AMD – равнобедренный треугольник, легко видеть, что $AB = BM$ и $DC = CM$ (по определению средней линии треугольника).

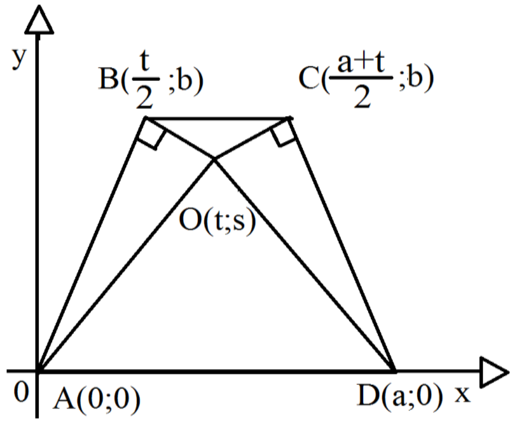

Рис.2. Чертёж для решения задачи методом координат

Таким образом, исходя из проведённых рассуждений и условия задачи, становится очевидным, что BO и CO – это серединные перпендикуляры отрезков AM и DM соответственно, то есть точка O – центр описанной окружности AMD, в которой AO и OD – радиусы, то есть они равны, что и требовалось доказать.

Теперь решим ту же задачу методом координат. Для начала сконструируем чертёж (рис. 2):

Расположим трапецию так, чтобы её основание лежало на оси Ox и вершина A совпадала с началом координат. Сразу оговоримся, что единичный отрезок будет равен «a» – основанию трапеции, высоту трапеции обозначим за «b», а для точки O зададим координаты $(t;\ s)$. Таким образом, у вершин B и C будут координаты, отражённые на рисунке 2, и легко видеть, что $|BC| = a/2$.

Теперь, пользуясь таблицей «языка» метода координат, рассмотрим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы отрезки AO и DO были равны:

$$|AO|=|DO| \Leftrightarrow \sqrt{t^2+s^2}=\sqrt{(t-a)^2+(s-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+s^2}=\sqrt{t^2-2at+a^2+s^2} \Leftrightarrow t^2+s^2=t^2-2at+a^2+s^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=a^2-2at \Leftrightarrow 2at=a^2 \Leftrightarrow t=\frac{a}{2}$$

Также используя таблицу, сделаем вывод о том, что нам даёт перпендикулярность отрезков боковым сторонам трапеции:

$$\begin{cases} AB\perp BO \Rightarrow (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO})=0 \Rightarrow \dfrac{t^2}{4}+bs-b^2=0 \Rightarrow \dfrac{-t^2}{4}+b^2-bs=0 \\ CO\perp DC \Rightarrow (\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{DC})=0 \Rightarrow \dfrac{(a-t)(t-a)}{4}+b^2-bs=0 \Rightarrow \dfrac{2at-t^2-a^2}{4}+b^2-bs=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-t^2}{4}+b^2-bs=\frac{2at-t^2-a^2}{4}+b^2-bs \Rightarrow \frac{-t^2}{4}=\frac{2at-t^2-a^2}{4} \Rightarrow -t^2=2at-t^2-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2at-a^2=0 \Rightarrow t=\frac{a}{2} \Rightarrow |AO|=|DO|, \text{ что и требовалось доказать.}$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОВЕДЁННЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Чтобы оценить продемонстрированные выше доказательства с точки зрения умственных и временных затрат, сравним суммарное количество математических фактов, которые были применены в синтетическом и координатном методах, предполагая, что их должен также использовать обучающийся средней школы при собственных рассуждениях. Оформим результат в виде таблицы:

Таблица 2.

Перечень фактов, применённых при решении задачи на доказательство

	Аналитико-синтетический метод	**Метод координат**
Факты	• определение равнобедренной трапеции • дополнительное построение (продление боковых сторон трапеции до пересечения) • свойство углов при основании равнобедренной трапеции (равны) • свойство углов при основании равнобедренного треугольника (равны) • признак средней линии треугольника (параллельна основанию и равна его половине) • определение средней линии треугольника (соединяет середины боковых сторон) • определение серединного перпендикуляра • свойство описанной окружности треугольника (центр – в точке пересечения серединных перпендикуляров) • определение описанной окружности (проходит через вершины треугольника) • определение радиуса окружности	• определение равнобедренной трапеции • расположение трапеции в прямоугольной системе координат и задание координат ключевых точек • нахождение длины отрезка по координатам • нахождение координат вектора по его концам • свойство скалярного произведения ортогональных векторов • нахождение скалярного произведения векторов по их координатам • основные законы арифметики
Суммарное количество фактов	10	7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведённого исследования можно констатировать, что метод координат действительно наиболее эффективен и эргономичен по времени при доказательстве математических фактов, изучаемых в средней школе. Очевидно, что главное преимущество метода состоит в его унифицированности, так как таблица перевода задачи с геометрического языка на язык координат может применяться практически в каждой задаче и теореме школьного курса геометрии. Также, используя систему координат, не всегда нужно тратить время на обдумывание необходимого дополнительного построения и на вспоминание различных определений, признаков и свойств, которые нужно обязательно применять при использовании аналитико-синтетического метода. Всё это позволяет сделать вывод о том, что метод координат наиболее предпочтителен при решении олимпиадных задач, а также задач повышенной сложности из ЕГЭ, так как он позволяет обучающемуся существенно экономить время и умственные силы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Далингер В. А Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. М.: Просвещение, 2006. 256 с.
2. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе. М.: Просвещение, 2002. 224 с.
3. Саранцев Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005. 183 с.
4. Суховиенко Е. А., Самигуллина З. П., Севостьянова С. А., Эрентраут Е. Н. Теория и методика обучения математике: общая методика. Челябинск: Образование, 2010. 65 с.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования от 17 мая 2012 № 413 с изм. и допол. в ред. от 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г.