

Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В.

## ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О ПРОВИСАНИИ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ

### Аннотация

В статье рассматривается решение в среде MS Excel модельной оптимизационной задачи о цепной линии. Цепная линия моделируется системой равноотстоящих точечных масс. Оптимизируемым параметром является суммарная потенциальная энергия цепочки. В задаче широко используются межпредметные связи математики, физики, информатики и ИКТ. Исследование может стать основой для школьного проекта.

**Ключевые слова:** цепная линия, потенциальная энергия, межпредметные связи, школьные проекты, метод проектов, проектная деятельность.

*Aksenova O.V., Bodryakov V.Yu., Bykov A.A., Toporova N.V.*

## OPTIMIZATION PROBLEM ABOUT THE CHAIN LINE

### Abstract

The article deals with the solution of the model optimization problem of the chain line in MS Excel environment. The chain line is modeled by a system of equidistant point masses. The optimizable parameter is the total potential energy of the chain. The problem is widely used interdisciplinary connections mathematics, physics, computer science and ICT. Research can be the basis for a school project.

**Keywords:** chain line, potential energy, intersubject communications, school projects, project method, project activity.

Согласно ФГОС ВО по направлению подготовки «44.03.01 Педагогическое образование» (уровень бакалавриата) [5] выпускник, освоивший программу бакалавриата в области исследовательской деятельности должен быть готов решать следующие профессиональные задачи: постановка решения задач в области науки и образования; использование в профессиональной деятельности методов научного исследования. Подготовка бакалавров к решению этих задач является актуальной проблемой, частично решаемой в настоящей статье. Мы считаем, что раннее привлечение бакалавров к научно-исследовательской работе [1, 2] является эффективным инструментом подготовки студентов к решению будущих профессиональных задач. Важно так же привлекать студентов к подготовке текстов научно-исследовательских работ. Развитые компетентности в области исследовательской деятельности выпускник университета сможет использовать в будущей профессиональной деятельности при руководстве проектной и учебно-исследовательской деятельности школьников.

Вслед за автором [3] *цели и задачи* исследовательской работы бакалавра имеют теоретические (Т), прикладные (П) и общепрофессиональные (ОП) аспекты:

- для Т-целей характерны требования «ознакомиться», изучить соответствующую теорию, метод» и т.д.;
- для П-целей – «реализовать алгоритм», «рассмотреть приложения теории к решению задачи» и т.д.;
- для ОП-целей – «определить возможность применения изученного к последующей профессиональной деятельности».

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Если подвесить нерастяжимую невесомую нить за ее концы, то она очень будет напоминать параболу. Точное решение показывает, что реальная цепная линия не является параболой, в этом убедились уже давно, в конце XVII века, три великих математика – И. Бернулли, Г. Лейбниц и Х. Гюйгенс – почти одновременно и независимо друг от друга. Однако, точное решение является довольно сложным (см.прил.) и доступно при условии полноценного изучения курса математического анализа и дифференциальных уравнений. Между тем, и мы намерены показать это в работе, цепная линия может быть успешно промоделирована системой равноотстоящих точечных масс при фиксированной общей массе и длине цепи.

Сказанное позволяет сформулировать *гипотезу* исследования: в результате моделирования цепной линии системой равноотстоящих точечных масс (при фиксированной общей массе цепи) получающаяся ломаная линия при увеличении числа масс будет приближаться к непрерывной теоретической цепной линии.

Для моделирования цепной линии проведем оптимизационный компьютерный эксперимент в среде MS Excel с широким привлечением межпредметных связей с физикой и математикой. Для этого закрепим грузики одинаковой массы на невесомой нерастяжимой нити, подвешенной в поле тяжести Земли в двух точках за концы. Грузики будут опускаться как можно ниже, чтобы их суммарная потенциальная энергия стала минимальной, но препятствием для их падения будут связывающие грузики отрезки нити, длины которых одинаковы между любыми двумя массами.

Точное решение задачи определяет постановку оптимизационной задачи – задачи моделирования цепной линии массой  $m$  и длиной  $\ell$ , состоящей из  $n$  равноотстоящих одинаковых по массе точечных масс (грузиков)  $m_1 = m/n$ , соединенных тонкими гибкими невесомыми нитями равной длины  $\ell_1 = \ell/(n + 1)$ .

Похожий эксперимент был рассмотрен в статье «Осторожно: цепная функция» журнала «Информатика в школе» (2017, №4) [4]. Но авторы решали поставленную задачу в среде Mathcad и их вычислительный эксперимент прервался на девяти грузиках, так как Решатель пакета Mathcad не справился больше обрабатываться данные.

Поэтому мы решили выполнить эту задачу в среде MS Excel, провести более глубокий анализ и дошли до 21 грузика (объяснение – почему именно 21 – приведено в конце решения задачи).

Итак, задачу будем решать следующим путем. Выберем для определенности число грузиков  $n$  (задаваемый параметр задачи) нечетным:  $n = 2k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, k_{max}$ . При этом координаты «нулевого» грузика есть  $y^{[0]} = y(0)$ ,  $x^{[0]} = 0$ . В силу симметрии задачи, очевидно, что достаточно рассмотреть только половину цепочки; для определенности – правую, с  $x \geq 0$ . Положения и координаты грузиков – точечных масс обозначим как  $M^{[k]} (x^{[k]}, y^{[k]})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, (k_{max} - 1)$  (при  $k = k_{max}$  имеем правую точку подвеса).

Тогда минимизируемой целевой функцией будет потенциальная энергия выбранной правой половины всей цепочки:

$$W_I = \frac{1}{2} m_1 g y(0) + m_1 g \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} y^{[k]}$$

В качестве минимизируемых параметров удобно выбрать углы  $\alpha^{[k]}$  с положительным направлением оси  $Ox$ , образуемые отрезками  $M^{[k]}M^{[k+1]}$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (k_{\max} - 1)$ , получающейся ломаной линии. Задание углов полностью определяет координаты точечных масс цепочки.

Действительно,

$$\begin{aligned} y^{[0]} = y(0) &= y_0 - \ell_1 \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \sin \alpha^{[k]} \\ y^{[1]} &= y(0) + \ell_1 \sin \alpha^{[0]}; \\ y^{[2]} &= y^{[1]} + \ell_1 \sin \alpha^{[1]}; \\ y^{[3]} &= y^{[2]} + \ell_1 \sin \alpha^{[2]}; \\ &\dots, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Подведем итоги сказанному.

Минимизируя функционал потенциальной энергии правой половины цепочки грузиков

$$W_I = \frac{1}{2} m_1 g y(0) + m_1 g \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} y^{[k]}$$

по параметрам оптимизации  $\alpha^{[k]}$  (причем все  $\alpha^{[k]} > 0$ ) при дополнительном требовании

$$\frac{1}{2} \ell = \ell_1 \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \cos \alpha^{[k]} = \text{Const},$$

можно определить координаты всех грузиков  $M^{[k]} (x^{[k]}, y^{[k]})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, (k_{\max} - 1)$ , и форму образуемой ими ломаной. Левая половина цепочки будет симметрична правой.

При увеличении числа грузиков  $n$  (и соответствующем уменьшении массы каждого из них при постоянстве массы  $m$  всей цепочки) модельная ломаная линия должна приближаться к точному решению задачи – уравнению цепной линии  $y = y(x)$ .

Итак, для нашего компьютерного эксперимента зададим конкретные значения параметров модели. Пусть длина всей нити равна  $\ell = 100$  см. Координаты (в см) правой точки подвеса положим  $M(40, 50)$ , левая точка подвеса симметрична точке  $M$  относительно оси ординат. Масса цепи  $m = 1000$  г. Количество грузиков варьировалось от  $1$  до  $n = 21$ .

Потенциальная энергия – это произведение массы тела на его высоту относительно нулевого уровня и на ускорение свободного падения  $g$ . Как показывает точное решение задачи, форма цепной линии не зависит от величины  $g$ . Отсюда следует вывод, что тяжелая металлическая цепь и невесомая ниточка будут провисать одинаково и на Земле, и на Луне, если их длины и координаты точек подвеса совпадают.

Минимизацию потенциальной энергии будем проводить с помощью встроенной в MS Excel функции «поиск решения» (данные → поиск решения). В силу симметрии задачи минимизировать достаточно потенциальную энергию лишь одной, например, правой части цепной линии. При этом берется половина массы центрального грузика.

Итак, рассмотрим первый случай, когда один грузик ( $n = 1$ ), тогда масса  $m_1$  этого (нулевого) грузика будет равняться массе  $m$  всей цепи, т.е.  $m_1 = 1000$  грамм. Координаты точек подвеса заданы выше. Длина одного отрезка цепи  $\ell_0 = 100/(n+1) = 50$  см. Теперь определим угол  $\alpha$  между отрезком  $M^{(0)}M^{(1)}$  и положительным направлением оси  $Ox$ . Здесь нужно помочь программе и задать значение угла, близкое к реальному, пусть  $\alpha \approx 0,6$ . Тогда координаты нулевого грузика:  $x^{(0)} = 0$ , а  $y$  вычислим по следующей формуле:  $y^{(0)} = y(0) - \ell_0 \sin \alpha$ , где  $y(0) = 50$  – координата точки подвеса по оси ординат,  $\ell_0 = 50$  – длина отрезка нити. Координаты правой точки подвеса тоже пропишем формулами:  $x^{(1)} = x^{(0)} + \ell_0 \cos \alpha$ ,  $y^{(1)} = y^{(0)} + \ell_0 \sin \alpha$ . И пусть  $W$  – потенциальная энергия. На рис. 1 показаны все формулы, с помощью которых мы реализуем нашу задачу в MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x	y	$\alpha$	Length	sin( $\alpha$ )		n =	1
2	0	0	=I4-I5*F2	0,6	=I4	=SIN(D2)		l =	100
3	1	=B2+I5*COS(D2)	=C2+I5*F2					x0 =	40
4								y0 =	50
5	W=	=I7*C2/2						l0 =	=I2/(I1+1)
6								m =	1000
7								m1 =	=I6/I1

Рис. 1. Формулы для случая с одним грузиком

На рис. 2 представлена та же самая таблица, но без сводки формул:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x	y	$\alpha$	Length	sin( $\alpha$ )		n =	1
2	0	0	21,76787633	0,6	50	0,564642473		l =	100
3	1	41,26678075	50					x0 =	40
4								y0 =	50
5	W=	10883,93817						l0 =	50
6								m =	1000
7								m1 =	1000

Рис. 2. Таблица со значениями для случая с одним грузиком

Теперь применим функцию «поиск решения» (рис. 3) для минимизации функционала потенциальной энергии. Целевой ячейкой установим значение потенциальной энергии  $W$ , устанавливаем маркер на «равной минимальному значению», варьируемым параметром будет угол  $\alpha$ , и наложим ограничения: координата точки подвеса по «иксу» (ячейка B3) должна быть равна 40 – точной координате точки подвеса по оси  $Ox$  (ячейка I3); угол  $\alpha$  (ячейка D2) должен быть больше или равен нулю.

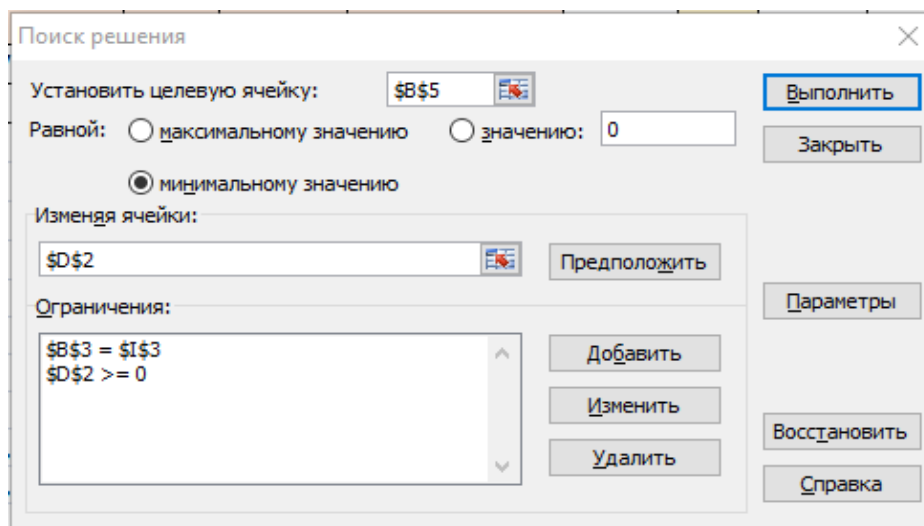


Рис. 3. Функция «поиск решения» для случая с одним грузиком

Запускаем «поиск решения» и видим (рис. 4), что функционал потенциальной энергии  $W$  для нити с одним грузиком минимизировался, изменился варьируемый угол  $\alpha$ , условие  $\alpha \geq 0$  выполнено, координата точки подвеса сравнялась с заданной координатой точки подвеса. Значит задача для случая с одним грузиком решена, и наша ломанная удовлетворяет условиям задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x	y	$\alpha$	Length	$\sin(\alpha)$		n =	1
2	0	0	20	0,643501	50	0,6		l =	100
3	1	40	50					x0 =	40
4								y0 =	50
5	W=	10000						l0 =	50
6								m =	1000
7								m1 =	1000

Рис. 4. Результат задачи после оптимизации

Построим полный график (и правую, и левую части) и убедимся в правильности решенной задачи (рис. 5):

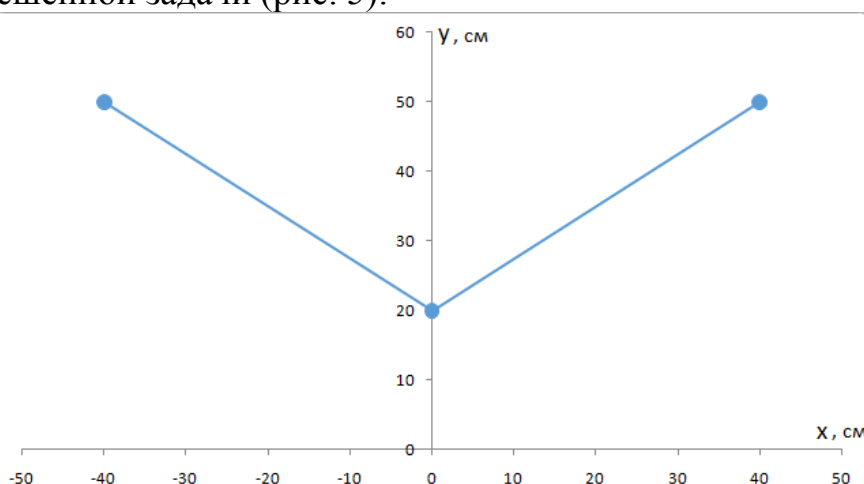


Рис. 5. Ломанная цепной линии для  $n = 1$

Для систематизации решения задачи выполним всё точно так же для случая с тремя грузиками и убедимся в правильности выполнения действий.

Итак, даны 3 грузика ( $n = 3$ ) на всю нить. Масса каждого грузика будет равняться:  $m_1 = m/n = 1000/3 = 333,33$  грамм. Координаты точек подвеса такие же. Длина одного отрезка цепи  $\ell_0 = 100/(n+1) = 25$  см. Зададим угол  $\alpha^{[0]}$  между отрезком  $M^{[0]}M^{[1]}$  и положительным направлением оси  $Ox$  и угол  $\alpha^{[1]}$  между отрезком  $M^{[1]}M^{[2]}$  и положительным направлением оси  $Ox$ . Пусть  $\alpha^{[0]} \approx 0,3$ ,  $\alpha^{[1]} \approx 0,6$ . Теперь определим координаты нулевого грузика и грузика на правой стороне графика. Итак, координаты нулевого грузика:  $x^{[0]} = 0$ , а  $y$  вычислим по следующей формуле:  $y^{[0]} = y(0) - \ell_0(\sin \alpha^{[0]} + \sin \alpha^{[1]})$ , где  $y(0) = 50$  – координата точки подвеса по оси ординат,  $\ell_0 = 25$  – длина отрезка нити. Координаты первого грузика найдем по следующим формулам:  $x^{[1]} = x^{[0]} + \ell_0 \cos \alpha^{[0]}$ ,  $y^{[1]} = y^{[0]} + \ell_0 \sin \alpha^{[0]}$ . Формулы координат точки подвеса аналогичны случаю с одним грузиком. И пусть  $W$  – потенциальная энергия. На рис. 6 показаны все формулы, с помощью которых реализуется задача в MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11		x	y	$\alpha$	Length	sin( $\alpha$ )		n =	3
12	0	0	=I14-I15*СУММ(F12:F13)	0,3	=I15	=SIN(D12)		l =	100
13	1	=B12+I15*COS(D12)	=C12+I15*SIN(D12)	0,6	=I15	=SIN(D13)		x0 =	40
14	2	=B13+I15*COS(D13)	=C13+I15*SIN(D13)					y0 =	50
15								l0 =	=I12/(I11+1)
16	W=	=I17*C12/2+I17*C13						m =	1000
17								m1 =	=I16/I11

Рис. 6. Формулы для случая с тремя грузиками

На рис. 7 представлена та же самая таблица, но без сводки формул:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11		x	y	$\alpha$	Length	sin( $\alpha$ )		n =	3
12	0	0	28,495933	0,3	25	0,295520207		l =	100
13	1	23,88341223	35,88393817	0,6	25	0,564642473		x0 =	40
14	2	44,5168026	50					y0 =	50
15								l0 =	25
16	W=	16710,63489						m =	1000
17								m1 =	333,33333

Рис. 7. Таблица со значениями для случая с тремя грузиками

Теперь применим функцию «Поиск решения» (рис. 8) для минимизации функционала потенциальной энергии аналогично первому случаю.

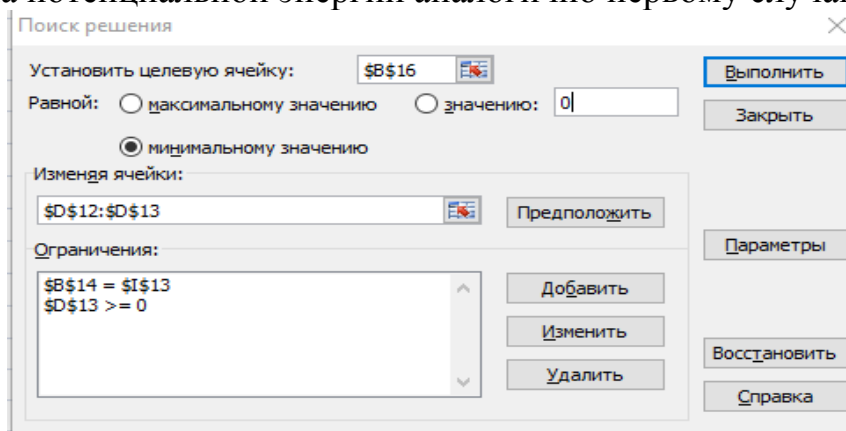


Рис. 8. Функция «поиск решения» для случая с тремя грузиками

Запускаем «поиск решения» и видим (рис. 9), что функционал потенциальной энергии  $W$  для нити с тремя грузиками минимизировался.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11		x	y	$\alpha$	Length	$\sin(\alpha)$		n =	3
12	0	0	22,513981	0,35924	25	0,351562076		l =	100
13	1	23,404114	31,303033	0,84486	25	0,747878683		x0 =	40
14	2	40	50					y0 =	50
15								l0 =	25
16	W=	14186,674						m =	1000
17								m1 =	333,33333

Рис. 1. Результат задачи после оптимизации

И теперь наложим графики друг на друга (рис. 10) для большей видимости правильности решения оптимизационной задачи.

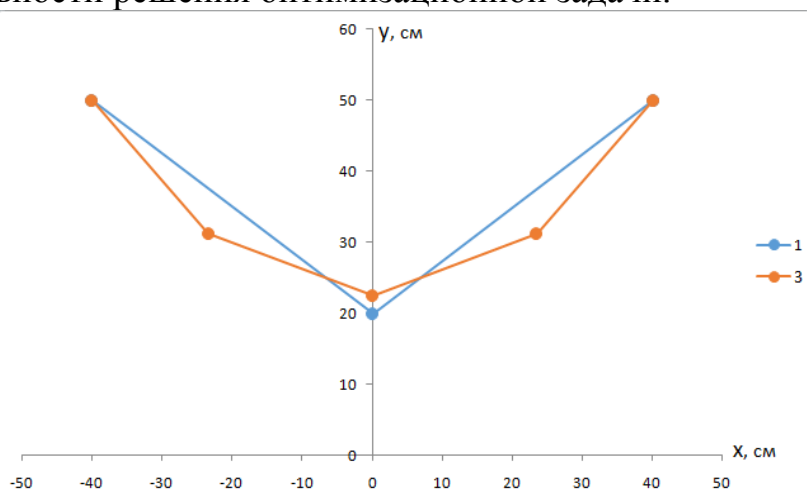


Рис. 2. Ломаные цепной линии для  $n = 3$

Подведем итоги. Если аналогично продолжать рассматривать данную оптимизационную задачу, но с увеличением числа грузиков, то ломанная будет всё ближе и ближе приближаться к графику цепной линии.

В реализации этого эксперимента мы дошли до 21 грузика, хотя MS Excel справился бы и с большим числом. Но почему именно 21? Потому что ордината вершины цепной линии остается постоянной до второго знака. Ниже представлены ломанные цепной нити для всех рассмотренных случаев (рис. 11).

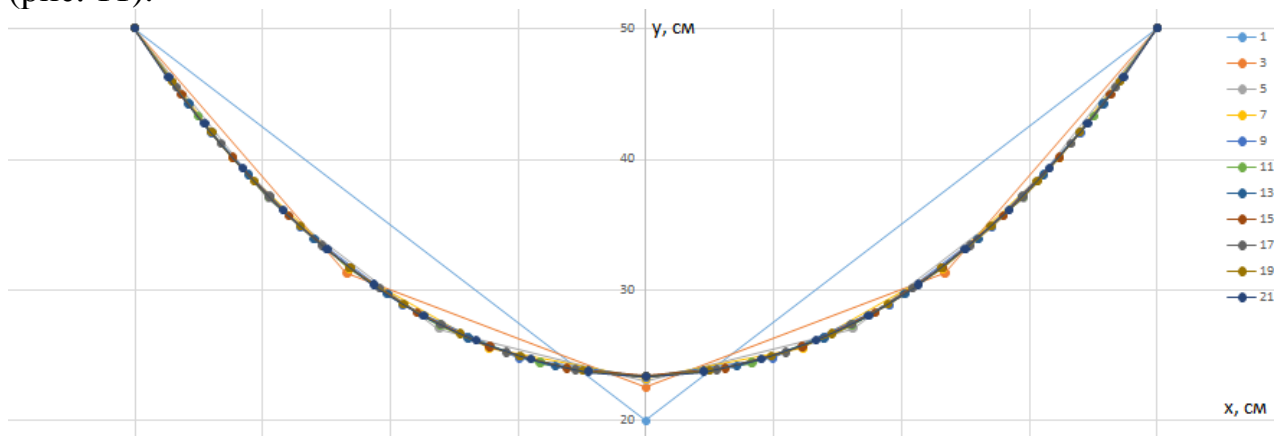


Рис. 3. Ломаные цепной линии для  $n = 1, \dots, 21$

И на рис. 12 те же самые ломанные, где в увеличенном масштабе показана область вблизи  $x = 0$ .



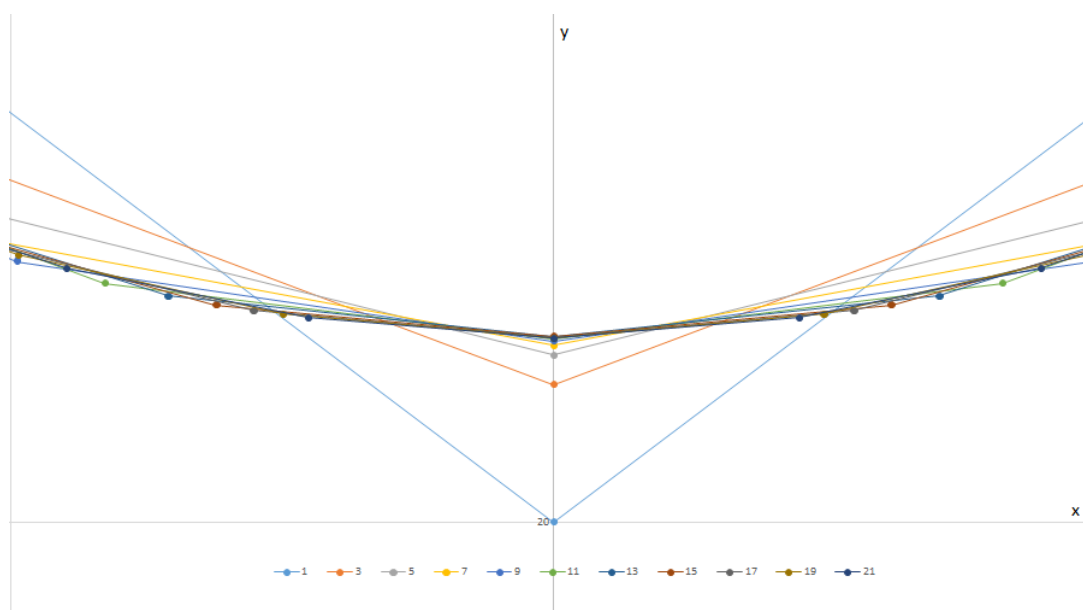


Рис. 4. Ломаная цепной линии для  $n = 1, \dots, 21$  вблизи  $x = 0$

Таким образом, проведенные нами модельные расчеты полностью подтверждают гипотезу исследования. Говоря о возможности использования такого исследования в качестве школьного исследовательского проекта необходимо отметить следующее. Точное решение задачи является сложным и, конечно, должно быть сообщено ученику в готовом виде. Однако, часть исследования, связанная с разработкой алгоритма моделирования и его реализацией вполне посильна школьникам начиная с 7-8 класса.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Аксенова О. В., Бодряков В. Ю. Использование ИКТ для развития творческих умений студентов в процессе выполнения учебно-исследовательских заданий // Материалы научно-практической конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии», 12-13 октября 2017 г., Кемерово.
2. Аксенова О. В., Бодряков В. Ю. Система разноуровневых лабораторных работ по математике с применением ИКТ как инструмент фронтального формирования учебно-исследовательских и творческих умений обучающихся // Современные информационные технологии в образовании: сборник материалов XXVIII Международной конференции, Москва-Троицк: Фонд «Байтик», 27 июня 2017 г.
3. Котова Л. В. Лабораторные исследовательские работы в профессионально направленном обучении методам и средствам защиты информации будущих бакалавров педагогического образования // Информатика и образование. 2018. № 1. С. 53-60.
4. Очков В. Ф., Цуриков Г. Н., Чудова Ю. В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. 2017. № 4. С. 58-62.
5. Приказ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата)» от 04 декабря 2015 г. № 1426 // Министерство образования и науки Российской Федерации.