УДК 372.851.4
ББК Ч426.221-231 ГСНТИ 14.25.09 Код ВАК 13.00.02

**Блинова Татьяна Леонидовна,**
кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики обучения математике Института математики, информатики и информационных технологий, Уральский государственный педагогический университет; 620000, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9; e-mail:blinoff@k96.ru.

**Унегова Татьяна Александровна,**
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института математики, информатики и информационных технологий, Уральский государственный педагогический университета; 620000, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9; e-mail: unta@mail.ru.

# МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ С ПРЕДМЕТАМИ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНОГО ЦИКЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СИММЕТРИЯ»

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: геометрия; пространство; движение; самосовмещение; группы симметрий; многогранники.

АННОТАЦИЯ. Для реализации требований федерального государственного образовательного стандарта современному учителю приходится по-новому взглянуть на содержание предметной области «Математика», рассматривая ее понятия и факты в приложении к явлениям реального мира. Таким образом можно повысить заинтересованность обучающихся в изучении математики и сформировать у них убеждение, что математика пронизывает все слои и все проявления нашей жизни. В любом разделе школьной математики всегда найдутся такие темы, которые позволяют учителю снова и снова подтверждать очевидную истину – «математика вокруг нас». В работе на основе темы «Симметрия» в геометрии 10–11 классов определены возможные межпредметные связи курса математики с физикой, биологией. Также даны определения движений плоскости и пространства. Дано понятие самосовмещения фигуры и группы самосовмещений. Рассмотрены правильные и полуправильные многогранники, так называемые платоновы и архимедовы тела. Подробно изложен материал о додекаэдре и современной интерпретации формы Вселенной. Упомянут усеченный октаэдр – тетракаидекаэдр как базовая структура многих биологических клеток. Работа предназначена для учителей математики и всех заинтересованных читателей.

**Blinova Tat'yana Leonidovna,**
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Department of Methods of Teaching Mathematics, Institute of Mathematics, Informatics and Information Technologies, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

**Unegova Tat'yana Aleksandrovna,**
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Higher Mathematics, Institute of Mathematics, Informatics and Information Technologies, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

# INTERDISCIPLINARY RELATIONS OF SCHOOL MATHEMATICS WITH NATURAL SCIENCE SUBJECTS IN STUDYING THE TOPIC OF «SYMMETRY»

KEY WORDS: geometry; space; movement; self-alignment; symmetry group; polyhedra.

ABSTRACT. To implement the requirements of the federal state educational standards, a modern teacher should take a fresh look at the content of the subject area "Mathematics", considering its notions and facts in relation to the real world phenomena. Thus, it is possible to enhance the interest of students in mathematics and form the belief that mathematics permeates all layers and manifestations of our life. In any section of the school course of mathematics there are topics that allow the teacher to confirm the obvious truth again and again - "mathematics is around us". The article deals with the theme of symmetry in the study of geometry in grades 10-11. It demonstrates the interdisciplinary connections of mathematics with the courses of physics and biology. The authors give definitions of movement of the plane and movement in Euclidean space. The article formulates the concept of self-alignment of geometric figures and groups of self-alignments. The article dwells on regular and semi-regular polyhedra – the so-called Platonic and Archimedean Solids. It mostly focuses on the dodecahedron and the modern interpretation of the geometric form of the universe. The article also deals with the truncated octahedron – tetrakaidecahedron, which is a basic structure of many biological cells. The paper is addressed to mathematics teachers and all interested readers.

## Введение

В работе [1] законы симметрии рассмотрены с точки зрения эстетики восприятия архитектурных форм. Однако в природе законы симметрии носят настолько фундаментальный характер, что стоит рассмотреть более подробно их связь с математикой. Во-первых, таким образом более широко раскрываются возможности предметной области «Математика», предоставляющие современному учителю широкое поле деятельности для реализации требований стандарта, связанных с формированием компетентности обучаемых, подготовкой их к успешной самореализации в будущей профессиональной деятельности. Во-вторых, при изучении темы «Симметрия» как нельзя глубже прослеживаются межпредметные связи математики с физикой, биологией, химией, генетикой, что в свою очередь отвечает следующим требованиям к результатам освоения образовательной программы основного общего образования в предметной области «Математика»:

- осознание значения математики в повседневной жизни человека;
- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Каким образом изучение математического понятия симметрии может способствовать реализации данных требований? Начнем с того, что симметрия – данность нашего восприятия окружающего мира, поэтому вполне естественно, что ее закономерности с древности до наших дней привлекают внимание математиков. С другой стороны, примеров, на которых можно акцентировать внимание учащихся, великое множество в различных областях естествознания, а также в традициях культуры разных народов. Целью данной работы является демонстрация связи явлений симметрии вообще с симметрией в математике на уровне, вполне доступном пониманию школьника.

**Симметрия как движение пространства**

Изучение темы «Симметрия» необходимо начинать с понятия *пространства*. Понятие пространства имеет множество значений. Прежде всего, это геометрическая модель, имеющая три однородных измерения: высоту, ширину и длину. То есть трехмерное пространство – это пространство, понимание которого связано с координацией движения человека. Одним из смыслов понятия пространства в физике является как раз обычное трехмерное пространство, в котором определяется положение физических тел, происходит механическое движение, геометрическое перемещение различных физических объектов. Предполагается, что данное пространство изотропно и однородно. Первое из этих свойств означает, что в пространстве нет какого-то выделенного направления, относительно которого существует «особая» симметрия, т. е. поворот системы координат на произвольный угол не изменяет расстояний между двумя точками. Второе свойство означает, что все точки пространства равноправны, иначе говоря, любое действие не зависит от выбора точки отсчёта. Именно это пространство связано с различными видами симметрии.

Рассмотрим все возможные движения плоскости, которая является двумерным пространством. Их всего четыре [2]:

1) *параллельный перенос*;
2) *поворот вокруг точки на угол* $\varphi$;
3) *осевая симметрия*, или, иначе говоря, отражение от прямой (рис. 1);
4) *скользящая симметрия* – композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии (рис. 2).

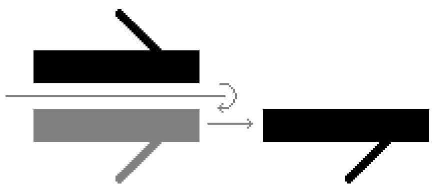


**Рис. 2.** Движение плоскости. *Скользящая симметрия.*

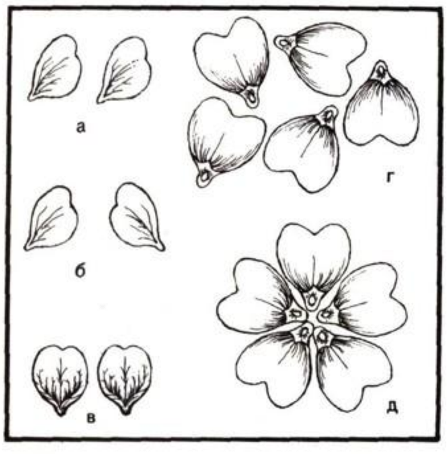



**Рис. 1.** Движение плоскости
*а — параллельный перенос;*
*б, в — осевая симметрия;*
*д — поворот вокруг точки на угол 72°;*
*г —асимметрична фигура*

Каждое движение трехмерного пространства (геометрического пространства реального мира) относится уже к одному из шести видов [2]:

1) *параллельный перенос*;
2) *поворот вокруг прямой* на угол $\varphi$ (его частный случай, когда $\varphi = 180^\circ$, назы-

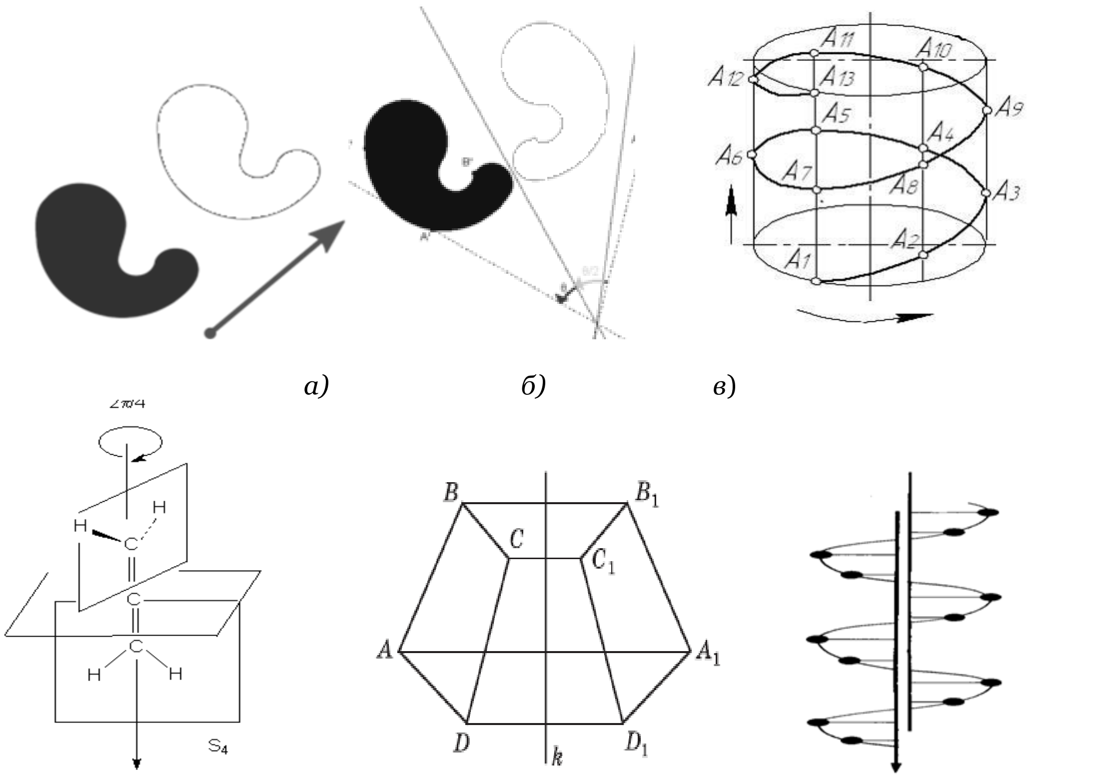
вают *симметрией относительно прямой* или просто *осевой симметрией*);

*3) винтовое движение* – композиция поворота вокруг прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой;

*4) отражение от плоскости*, которое также называют *симметрией относительно плоскости* или *зеркальной симметрией*;

*5) поворотное отражение* с углом поворота $\varphi$ – композиция поворота вокруг прямой на угол $\varphi$ и отражения от перпендикулярной ей плоскости (его частный случай, когда $\varphi = 180^\circ$, называют *центральной симметрией*, центром которой является точка пересечения прямой и плоскости);

*6) скользящее отражение* – композиция отражения от плоскости и параллельного переноса вдоль этой плоскости (рис. 3).




*г) д) е)*

**Рис. 3.** Движение трехмерного пространства*: а – параллельный перенос; б – осевая симметрия; в – винтовое движение; г – отражение от плоскости; д – поворотное отражение (зеркальная симметрия); е – скользящее отражение*

Приведенные примеры движений будут иметь один и тот же вид, независимо от того, в какой точке пространства или в какое время мы их рассматриваем. Эта независимость от положения и времени в современной математике носит название *инвариантности*. Согласно Вейлю [5], именно инвариантность является основным признаком наличия симметрии.

**Симметрия с позиции теории групп**

Следующее важное понятие в изучении симметрии – понятие *группы*. Предшественниками этого раздела алгебры были такие выдающиеся математики как Эйлер, Гаусс, Лагранж, Абель. Но термин *группа* впервые ввел в 1830 году французский математик Эварист Галуа, создавший математическую теорию произвольных симметрий или теорию групп, ставшую краеугольным камнем не только алгебры, но и современной теоретической физики. После 40 лет невнимания к теории Галуа немецкий математик Ф. Клейн в 1972 году продемонстрировал ее мощь, доказав, что геометрия имеет столько ветвей развития, сколько групп симметрий могут иметь геометрические фигуры [6,9]. С этого времени теория групп стала необходима всем, и физикам в первую очередь. Именно физики внесли наиболее существенный вклад в развитие этой математической дисциплины.

Рассмотрим примеры групп симметрий плоских и объемных геометрических фигур, называя движения, входящие в группу, симметриями с соответствующим определяющим словом: поворотная симметрия, трансляционная симметрия и так далее.

Правильные геометрические фигуры на плоскости: круг, треугольник, квадрат, пятиугольник и вообще $n$-угольник. Все эти фигуры симметричны, но по-разному. Треугольник совмещается сам с собой либо при повороте вокруг центра тяжести на угол, кратный 120°, либо при отражении от одной из трех прямых, содержащих медианы. Т. е. группа симметрий треугольника состоит из шести элементов (три поворота и три отражения). У квадрата группа симметрий состоит из восьми элементов (четыре поворота вокруг центра на углы, кратные $\pi/2$, а также два зеркальных отражения относительно диагоналей и два относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон). Группа симметрий пятиугольника насчитывает уже 10 элементов: пять поворотов на углы, кратные $2\pi/5$, и пять отражений от прямых, каждая из которых проходит через вершину и середину противолежащей стороны). В $n$-угольнике мы насчитаем $n$ поворотных симметрий и столько же симметрий отражения. Круг при любом повороте относительно оси, проходящей через его центр, переходит сам в себя, как и в случае отражения от любого из бесчисленных диаметров. Как видим, его группа симметрий бесконечна.

В приведенных примерах группа, состоящая из повторных применений поворота на один и тот же угол $2\pi/n$, называется *циклической* группой порядка $n$ и обозначается $C_n$. Если учесть еще и зеркальные отражения относительно $n$ осей, то получим группу $D_n$, которая называется диэдральной. Таким образом, эти группы являются единственно возможными видами групп симметрий ограниченных плоских фигур:

$$C_1, C_2, C_3, \dots ; D_1, D_2, D_3, \dots \quad (1)$$

В этом ряду $C_1$ означает полное отсутствие симметрий, а $D_1$ наличие ровно одной зеркальной симметрии.

**Многогранники**

В отличие от плоскости, где правильных $n$-угольников бесконечно много, в тркехмерном пространстве правильных многогранников (они известны с древности) всего лишь пять. Их еще называют платоновыми телами, поскольку они играли большую роль в натурфилософии Платона. Это правильный тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр (рис 4).

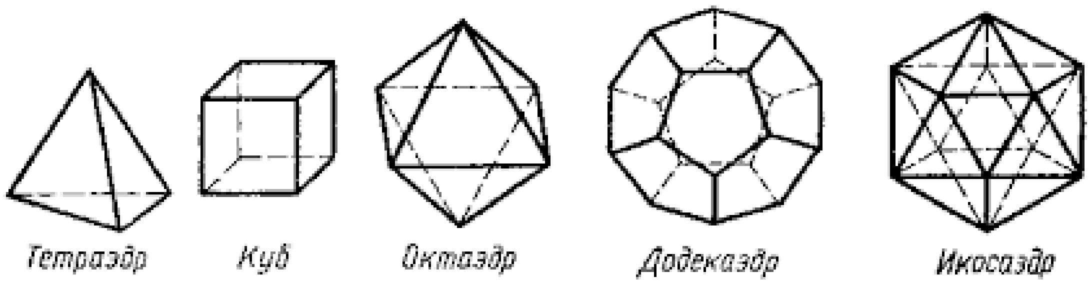



**Рис. 4.** Платоновы тела

В работе [1, пр.3] подробно рассмотрена группа симметрий (самосовмещений) куба.

Рассмотрим додекаэдр. Он образован двенадцатью правильными пятиугольниками, являющимися его гранями. В каждой его вершине сходятся три ребра. Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин. У него имеется центр симметрии, 15 осей симметрии, проходящих через центры противоположных ребер, и 15 плоскостей симметрий, каждая из которых проходит через вершину и середину противоположного ребра [13]. Этот многогранник древние греки могли наблюдать в весьма похожей структуре серного колчедана (пирита), довольно распространенного в местах их проживания. Предполагается, что греки использовали такой многогранник в качестве игральной кости. Платон в своей философии, отождествляя четыре других многогранника с огнем, землёй, воздухом и водой, считал, что Бог создал додекаэдр как образец Вселенной. Эти мифы древней Греции можно было бы и забыть, если бы не нижеследующее.

Выдающийся французский ученый-энциклопедист Пуанкаре – основатель геометрии многообразий, получившей название топологии, сумел мысленно создать теоретически непротиворечивую конструкцию с чрезвычайно интересными топологическими свойствами – так называемую многосвязную сферу гомологий (греч. homologia означает соответствие). А спустя еще четверть века, уже после смерти Пуанкаре, два других математика, Вебер и Зейферт [9], доказали, что абстрактную сферу гомологий Пуанкаре можно получить из вполне конкретного объекта – если «склеить» друг с другом противоположные грани додекаэдра. В 3-мерном пространстве это, конечно, невозможно, однако в 4-мерном – вполне (например, двумерную полоску бумаги в 3-мерном мире склеивают концами в бесконечную одностороннюю ленту Мебиуса). Так в науке топологии появился объект под названием «додекаэдрическое пространство Пуанкаре» – 4-мерное платоново тело со 120 додекаэдрическими гранями (гипотеза Пуанкаре об уникальности 3-сферы, прообраза пространств Пуанкаре, была доказана Российским математиком Перельманом в 2002 году [12]).

Эти пространства до сих пор могли бы оставаться на гипотетическом уровне, если бы в 2009 году не были получены результаты с американского спутника WMAP (the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Спутник был запущен в 2001 году и до 2009 года регистрировал реликтовое излучение (микроволновое фоновое космическое излучение, дающее представление об истории возникновения Вселенной) небесной сферы из точки либрации Лагранжа (точка, в которой малое тело остается неподвижным в поле гравитационного притяжения двух, движущихся относительно друг друга, массивных тел (в данном случае Земля-Солнце)). На основании полученных данных был сделан вывод, что Вселенная имеет форму компактного додекаэдрического пространства Пуанкаре [15].

Правильными многогранниками (равными кубами или комбинацией равных тетраэдров и равных октаэдров) можно заполнить трехмерное пространство целиком, не оставляя промежутков между ними. Додекаэдры и икосаэдры для этих целей не годятся. Однако если рассмотреть усеченный октаэдр, который получается из октаэдра отсечением всех его 6 вершин, то окажется, что этим *полу*правильным многогранником (рис. 5) уже можно замостить все пространство без пробелов и накладок. Эту фигуру некоторые специалисты называют тетракаидекаэдром. Этот многогранник интересен тем, что он привлек внимание архитекторов, так как обладает особыми свойствами и может служить элементом архитектурного дизайна [11]. Кроме того, как оказалось, он является обобщенной формой многих базовых клеточных структур нашего организма [11].

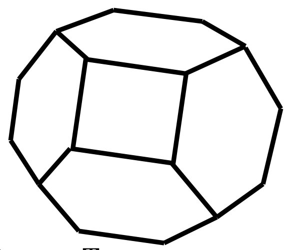


**Рис. 5.** Тетракаидекаэдр

Учитель может построить уроки изучения симметрии в курсе геометрии на примере многогранников и их использовании в современной архитектуре, дизайне и живописи, что не менее увлекательно, чем на примерах классического искусства.

**Кристаллы и теория групп**

Кристаллы всегда привлекали внимание именно своей симметрией. Бажовский Данила-мастер славился тем, что чувствовал внутреннюю структуру кристалла и огранял самоцветные камни так, чтобы они в полной мере раскрывали свою красоту.

Для рассмотрения геометрии кристаллических решеток удобно использовать не обычное *евклидово* пространство, а векторное. Полезно познакомить учащихся с другой трактовкой пространства, нежели на базе евклидовых аксиом. Приверженцем другой концепции, порожденной скорее алгеброй, чем геометрией, был немецкий математик Г. Вейль[5, предисловие, с.12]. Неопределяемыми понятиями *евклидова пространства* в аксиоматике Вейля являются понятия *вектора* и *точки*. При выбранной точке *O*, играющей роль начала координат положение любой точки *A* пространства может быть охарактеризовано единственным вектором **a**. Тогда бесконечная упорядоченная совокупность точек, обладающая группой симметрий, оставляющих хотя бы одну точку пространства на месте, будет называться *точечной группой симметрий*. Эти преобразования не меняют расстояния между любыми двумя точками пространства. Если же такая группа сохраняет точечную симметрию, но смещает все точки пространства при переносе (трансляции) на вектор между двумя любыми точками, то такая группа симметрий называется пространственной группой. Точечные группы описывают симметрию конечных объектов, а пространственные – бесконечных.

Честь введения в науку исследования пространственных кристаллографических групп принадлежит русскому ученому Е. С. Федорову и немецкому кристаллографу и математику А. Шенфлису. Таких групп, называемых группами Федорова, в 3-мерном пространстве насчитывается ровно 230 [6, 7].

Поскольку кристаллическая решетка обладает трехмерной периодичностью, то для пространственной симметрии кристаллов характерной является операция совмещения решетки с собой путем параллельных переносов (трансляций) в трех направлениях на векторы **a, b, c**, определяющих размеры элементарной ячейки. Другими возможными преобразованиями симметрии кристаллической структуры являются повороты вокруг осей симметрии на 180°, 120°, 90° и 60°; отражения в плоскостях симметрии; операция инверсии в центре симметрии, а также операции симметрии с переносами (винтовые движения, скользящие отражения и некоторые другие). Операции пространственной симметрии могут комбинироваться по определенным правилам, устанавливаемым математической теорией групп, и сами составляют группу[6].

В зависимости от набора элементов симметрии в кристаллических системах насчитывается 32 точечных группы, объединенных в семь *сингоний* (слово сингония происходит от греческого слова, дословно означающего «сходноугольность», т. е. схожесть углов между направляющими векторами элементарной ячейки) [3, 10] (рис. 6).

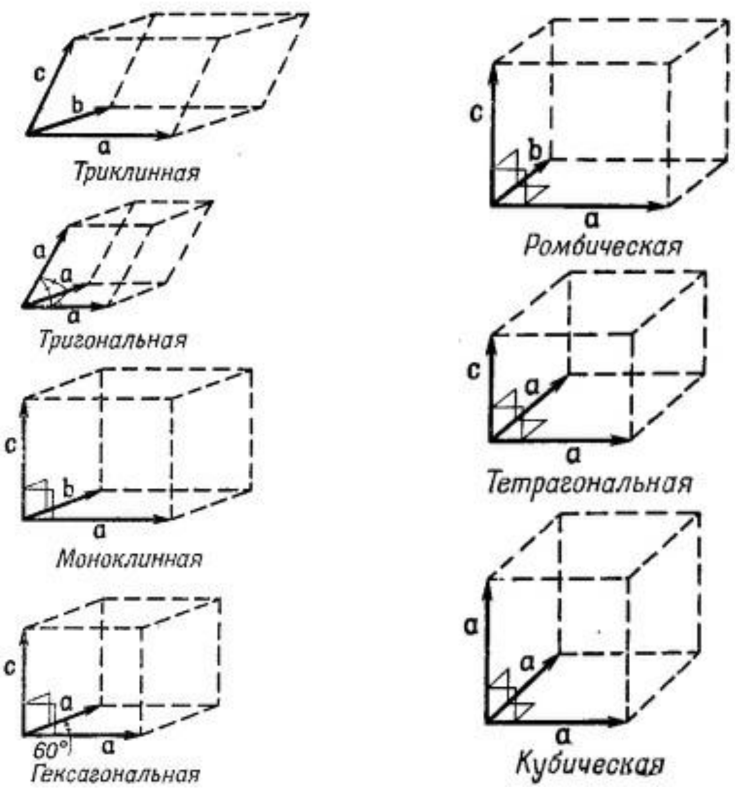



**Рис.6.** Сингонии

К настоящему времени исследовано около 100 тысяч кристаллов, в том числе порядка 80 тысяч кристаллов органического происхождения. И все они имеют кристаллическую решетку, обладающую структурой одной из 230 Федоровских групп.

Таким образом, учитель имеет широкие возможности для организации уроков по симметрии на примерах из физики, биологии.

Заинтересованность учителя, его информированность о том, какие темы могут иметь практическую пользу, поможет учащимися адаптироваться в социуме, определиться с выбором будущей профессии.

Одной из областей для организации исследовательской деятельности учащихся практико-ориентированного характера может служить современная архитектура, достижения биологии, связанные с математическими понятиями симметрии, химические связи атомов в молекулах и кристаллах, вопросы космологии, физики элементарных частиц.

Предлагаемая организация деятельности предназначена для расширения и систематизации теоретических и практических знаний учащихся 9–10 классов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Блинова Т. Л., Унегова Т. А. Екатеринбург глазами математика // Математика в школе.2014.№ 8 С. 42–52.
2. Блинова Т. Л., Унегова Т. А. Модель деятельности учителя математики по формированию представлений учащихся о значимости математики в жизни общества : пособие для учителей. Екатеринбург : Урал. гос. пед. ун-т, 2014.
3. Бобель Ю. А. Геометрия кристаллов. URL: http://ru.calameo.com/books/001190676ffcf45127bc1.
4. Богомолов А. Н. Математики, механики. Киев : Наукова думка, 1983.
5. Вейль Г. Симметрия. М. : Наука, 1968.
6. Вигнер Е. Этюды о симметрии. М. : Мир, 1971.
7. Демидов С. Поиск модели развития. Сборник рассуждений по устройству мира, их анализ и предложения. СПб: Петрополис, 2007. С. 332–333.
8. Многогранники. URL: http://www.mnogogranniki.ru.
9. Терстен У., Уикс Д. Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–78.
10. Фейман Р. Том 1. Фейнмановские лекции по физике: Современная наука о природе. Законы механики URL: http://www.all-fizika.com/article/index.php?id_article=1502.
11. Шестиугольный мир, суть геометрии природы. URL: http://new-hex-world.livejournal.com/22683.html.
12. Artmann B. Roman Dodecahedra // Mathematical Intelligencer. 1993.Vol. 15. P. 52–53.
13. Bigpicture. URL: http://bigpicture.ru/?p=395519.
14. Graham P. Collins. The Poincare Conjecture 99 Years Later: A Progress Report. John W. Milnor. February 2003. Availableat. URL: www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/poiproof.pdf.
15. Weeks J The Poincaré Dodecahedral Space and the Mystery of the Missing Fluctuations. URL: http://www.ams.org/notices/200406/fea-weeks.pdf.


## LITERATURE


1. Blinova T. L., Unegova T. A. Ekaterinburg glazami matematika // Matematika v shkole.2014.№ 8 S. 42–52.
2. Blinova T. L., Unegova T. A. Model' deyatel'nosti uchitelya matematiki po formirovaniyu pred-stavleniy uchashchikhsya o znachimosti matematiki v zhizni obshchestva : posobie dlya uchiteley. Ekaterinburg : Ural. gos. ped. un-t, 2014.
3. Bobel' Yu. A. Geometriya kristallov. URL: http://ru.calameo.com/books/001190676ffcf45127bc1.
4. Bogomolov A. N. Matematiki, mekhaniki. Kiev : Naukova dumka, 1983.
5. Veyl' G. Simmetriya. M. : Nauka, 1968.
6. Vigner E. Etyudy o simmetrii. M. : Mir, 1971.
7. Demidov S. Poisk modeli razvitiya. Sbornik rassuzhdeniy po ustroystvu mira, ikh analiz i predlozheniya. SPb: Petropolis, 2007. S. 332–333.
8. Mnogogranniki. URL: http://www.mnogogranniki.ru.
9. Tersten U., Uiks D. Matematika trekhmernykh mnogoobraziy // V mire nauki. 1984. № 9. S. 74–78.
10. Feyman R. Tom 1. Feynmanovskie lektsii po fizike: Sovremennaya nauka o prirode. Zakony mekhaniki URL: http://www.all-fizika.com/article/index.php?id_article=1502.
11. Shestiugol'nyy mir, sut' geometrii prirody. URL: http://new-hex-world.livejournal.com/22683.html.
12. Artmann B. Roman Dodecahedra // Mathematical Intelligencer. 1993.Vol. 15. P. 52–53.
13. Bigpicture. URL: http://bigpicture.ru/?p=395519.
14. Graham P. Collins. The Poincare Conjecture 99 Years Later: A Progress Report. John W. Milnor. February 2003. Availableat. URL: www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/poiproof.pdf.
15. Weeks J The Poincaré Dodecahedral Space and the Mystery of the Missing Fluctuations. URL: http://www.ams.org/notices/200406/fea-weeks.pdf.


Статью рекомендует д-р пед. наук, профессор Б. Е. Стариченко.