

УДК 372.851  
ББК 4426.221-24

ГСНТИ 14.01.11; 14.15.01

Код ВАК 13.00.01; 13.00.08

**Ахмедьянова Наталья Азатовна,**

магистрант 1 курса, Институт математики, информатики и информационных технологий, Уральский государственный педагогический университет (Екатеринбург); 620151, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9, к. 21; e-mail: ahmedyanovan@mail.ru.

**Мамалыга Раиса Федоровна,**

кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики, Уральский государственный педагогический университет (Екатеринбург); 620151, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9, к. 21; e-mail: gcg45@mail.ru.

## ФОРМИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В СОВРЕМЕННОМ ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вероятностно-статистическая линия; элементарный исход; сумма элементарных исходов; случайное событие; формирование понятия.

**АННОТАЦИЯ.** Определены этапы формирования основных понятий вероятностно-статистической линии: «элементарный исход», «сумма элементарных исходов», «случайное событие». Приведены конкретные пути их реализации. Авторы придерживаются индуктивного изложения учебного материала по теории вероятности.

**Ahmedyanova Natalia Azatovna,**

Under-graduate of 1-st year, Institute of Mathematics, Informatics and Information technology, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

**Mamalyga Raisa Fedorovna,**

Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Department of Higher Mathematics, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

## FORMATION OF MAIN CONCEPTS IN PROBABILITY-STATIC LINE IN MODERN SECONDARY SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

**KEY WORDS:** probability-static line; prime imputation; sum of prime imputation; accidental event; formation of concept.

**ABSTRACT.** The article describes the stages of formation of the main concepts in probability-static line: “prime imputation”, “sum of prime imputation”, “accidental event”. Concrete ways of their realization are given. The authors follow the inductive description of stochastic material.

Сегодняшнее введение элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики – третья попытка внедрения стохастики в истории российского образования с начала XX в. В различных научных журналах начиная с 2002 г. происходит активный обмен мнениями между учеными и учителями о необходимости и особенностях методики преподавания в школе материала вероятностно-статистической линии. В этих публикациях также представлен детальный анализ неудач прошлых подходов и сложностей настоящего [1; 2; 3; 5; 7; 11; 12; 14].

К основным причинам сложившейся ситуации авторы исследований относят: оторванность материала от практической современной жизни учеников [3; 5; 11; 12; 14]; отсутствие внутрипредметных и межпредметных связей [3; 4]; неподготовленность учительских кадров к введению элементов стохастики [1; 2]; недостаточную разработанность методики преподавания этого раздела [5; 7; 11]. Отдельные исследователи во-

обще предлагают исключить эту тему, считая ее изучение весьма затруднительным.

Необходимость включения в школьный образовательный процесс элементов теории вероятностей и статистики, на наш взгляд, объясняется усилением прикладной роли математики в современном обществе, в частности увеличением потока информации, скорости ее накопления и распространения. Применение методов теории вероятностей и математической статистики весьма значимо для описания, обработки и интерпретации информации. Однако недостаточная стохастическая грамотность учителей, отсутствие методических пособий, в которых описана методика формирования основных понятий, являются важнейшими причинами неудач введения в школьную практику этого раздела математики.

Из результатов проведенного анализа задачного материала вероятностно-статистической линии в рекомендованных к использованию в образовательном процессе школьных учебниках [9] следует, что зада-

ния, предлагаемые их составителями, в высшей степени однотипны. Например, в учебнике по математике для 5 классов по теме «Достоверные, невозможные и случайные события» предлагается семь заданий, из которых только одно не является типовым (формулировка типового задания: необходимо охарактеризовать предложенные события как достоверные, невозможные или случайные) [8].

Однотипность задач является одним из принципов подбора системы упражнений, однако столь же важными являются принцип непрерывного повторения, контрпримеры, принцип сравнения, принцип полноты [6; 10].

Учитывая эти принципы, мы предлагаем поэтапное формирование основных понятий вероятностно-статистической линии: «элементарный исход», «сумма элементарных исходов», «случайное событие», – что, на наш взгляд, позволит компенсировать некоторые сложности их введения.

Любой раздел математики, построенный аксиоматически, включает в себя основные (неопределяемые) понятия и отношения. Например, теория вероятностей начинается с введения понятий «случайное событие», «вероятность события». Строгое изложение данного раздела (например, основанного на аксиоматике А. Н. Колмогорова) в настоящее время возможно только на факультативах или для учащихся математических классов.

По сложившейся практике введение основных понятий школьных предметов в базовом курсе происходит не аксиоматически, а неявно, т. е. путем непосредственной демонстрации объектов, охватываемых этими понятиями, и (или) приведения контекста, в котором содержатся эти понятия. В рекомендованных к использованию в образовательном процессе школьных учебниках по математике определения понятий «испытание», «случайное событие», «вероятность события» основываются на интуитивных соображениях при постановке конкретных экспериментов и из контекста. При этом трудности в методике формирования этих понятий, которые необходимо преодолеть, более значительны, чем в геометрии при введении понятий «точка», «прямая», «плоскость» (где используется тот же прием). Причина этого кроется как в содержании предмета, так и в свойствах человеческой психики (и это неудивительно: теория вероятностей появилась на восемнадцать столетий позднее, чем геометрия).

При любом подходе (абстрактно-дедуктивном, аксиоматическом, конкретно-индуктивном) к формированию понятий школьного курса математики нецелесооб-

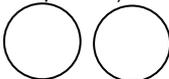
разно начинать курс с усвоения определения понятия, хотя такой подход, на первый взгляд, выглядит простым и экономичным по временным затратам.

На первом этапе необходима организация работы по «подведению под понятие», т. е. изучение объектов объема понятия, выявление характеристических свойств (существенных признаков), описание этих признаков. На этом этапе целесообразно использовать упражнения практического характера, упражнения на построение объектов, удовлетворяющих выделенным существенным свойствам [9], и применять материал для конкретно-чувственного восприятия [12]. Итогом этого этапа является формулировка определения понятия.

Остановимся более подробно на введении понятия «элементарный исход». На доске или на слайде учителем подготовлен текст следующего содержания:

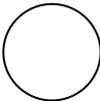
Примеры испытаний. Элементарные исходы

1.  Подбрасывание симметричной монеты и наблюдение ее «видимой» стороны («орел» или «решка»).

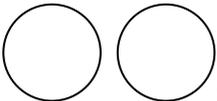
2.  Подбрасывание двух различных симметричных монет и определение их видимых сторон.

Обсуждение текста и оформление учащимися решения в своей тетради: школьники высказывают предположения о результатах испытания и анализируют их (выпадение орла, выпадение решки принимают, а падение монеты на ребро отвергается).

Решение задания 1 оформляется по следующей схеме:

а) испытание  ;  
 б) результаты испытания: «выпал орел», «выпала решка»;  
 в) элементарные исходы: О, Р.

Решение задания 2 оформляется по следующей схеме:

а) испытание  ;  
 б) элементарные исходы: ОО, ОР, РО, РР.

Учитель при обсуждении заданий 1 и 2 обращает внимание обучаемых на одно из характеристических свойств рассматриваемого понятия – быть некоторым результатом определенного испытания. Акцент на этом делается с помощью следующих вопросов.

1. К первому испытанию (задание 1): «Петья вышел на улицу». Будет ли это элементарным исходом в данном испытании?

2. Ко второму испытанию (задание 2):

- Выпадение двух «орлов». Будет ли это элементарным исходом в данном испытании?
- Выпадение на первой монете «орла», а на второй монете – «решки». Будет ли это элементарным исходом в данном испытании?
- Выпадение на одной из монет «решки» и на другой – «орла». Будет ли это элементарным исходом в данном испытании? Будет ли это результатом описанного испытания? В случае положительного ответа на последний вопрос, выделите элементарные исходы, которые приводят к этому результату испытания.



3.  Подбрасывание игрального кубика и определение числа очков указанных на верхней грани.

При обсуждении задания 3 учитель подводит к выявлению существенного признака – неразложимости. Для этого он направляет деятельность учащихся на нахождение ошибок в классификации результатов данного испытания (табл. 1), основанием которой является разложимость.

Необходимо включать на этом этапе задачи на устранение ошибочных ассоциаций, в частности по этой причине приведено задание 3. В нем «Выпадение более пяти очков» – элементарный исход. Слова «больше» или «меньше» в формулировках предыдущих предложенных заданий используются в качестве обозначения неэлементарных исходов.

При анализе результатов испытания, не являющихся элементарными исходами, учитель подчеркивает необходимость и це-

лесообразность введения понятия «сумма элементарных исходов».

При решении заданий (1, 2, 3) учащиеся конструируются элементарные исходы, т. е. происходит выявление объектов объема понятия «элементарный исход». При введении понятия «элементарный исход» необходимо добиваться у учащихся осознания следующего:

- того, что элементарный исход происходит в каком-то конкретном испытании;
- элементарный исход в одном испытании может являться неэлементарным исходом в другом испытании;
- элементарный исход является неразложимым результатом испытания.

Это формулируется в виде неявного определения: под элементарным исходом понимается результат испытания, который может произойти и может не произойти, и этот результат неразложим в этом испытании.

На втором этапе формирования понятий необходима дальнейшая работа с определением – его усвоение: каждое характеристическое свойство становится предметом изучения. Это обеспечивается сериями заданий на распознавание объектов, принадлежащих понятию. Задания этой серии включают в себя:

- объект, обладающий только одним из характеристических свойств понятия;
- объект, обладающий некоторой комбинацией существенных признаков.

На этом этапе необходимо устанавливать родовые и видовые связи, расширять объем понятия. Одна из сформулированных А. В. Усовой необходимых закономерностей процесса формирования понятий на этом этапе – первоначальное формирование отдельных понятий, а затем их систем.

Таблица 1

Карточка к третьему заданию

+ / →	Элементарные исходы	+ / ←	Другие результаты испытания
	Выпадение одного очка		Выпадение более четырех очков
	Выпадение четного числа очков		Выпадение нечетного числа очков
	Выпадение трех очков		Выпадение двух очков
	Выпадение пяти очков		Выпадение числа очков, кратное трем
	Выпадение менее пяти очков		Выпадение либо двух, либо пяти очков
	Выпадение четырех очков		Выпадение более пяти очков
I. Поставить «+», если предложение находится в соответствующем столбце, или «→», если предложение необходимо поставить в правый столбец, или «←» – если в левый.			
II. Дополнить таблицу элементарными исходами и другими результатами испытания.			

Так как определение элементарного исхода происходит не через ближайший род и видовые отличия (в силу его «первичности»), установить родовые и видовые связи при таком подходе не представляется возможным. Поэтому основное значение приобретают те понятия, объем которых шире объема понятия «элементарный исход». Ближайшим расширением объема понятия «элементарный исход» является сумма элементарных исходов (т. е. случайного события). Приведем определения суммы элементарных исходов и случайного события. Суммой элементарных исходов называется результат испытания, который наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы один из этих элементарных исходов (т. е. наступает либо один, либо несколько из этих элементарных исходов). Случайное событие – это сумма элементарных исходов. Поскольку формулировка определения суммы элементарных исходов (случайного события) дается учащимся готовой, то необходима работа по осмыслению каждого слова в определении.

Следующее задание подводит учащихся к установлению связей между понятиями «элементарный исход» и «случайное событие» (это один из вариантов задания, способствующих более глубокому усвоению этих понятий).



4. Испытание: извлечение случайным образом из коробки домино (предполагается, что дети знакомы с домино) одной костяшки. Составьте схему, в которой стрелками укажите принадлежность или непринадлежность результата испытания к элементарным исходам.

- Извлечен дубль
- Извлечена «костяшка» 0:0
- Извлечена «костяшка» 8:8
- Извлечена «костяшка», содержащая 5 очков
- Тарелка разбилась

Выполнение этого задания предваряется обсуждением вопросов, устанавливающих связь между понятиями «случайное событие» и «элементарный исход»:

- Каждое ли случайное событие будет элементарным исходом? Для подтверждения приведите пример испытания и случайное событие, которое не является элементарным исходом.
  - Каждый ли элементарный исход является случайным событием? Аргументируйте свой ответ, используя изученные определения.
- Выводы, полученные при обсуждении, и ответы к заданию оформляются учащимися в тетради (образец представлен на рисунке).



Рис. Образец выполнения задания 4

Таблица 2

Результаты

Номер партии	Количество очков на кубике (зеленый)	Количество очков на кубике (синий)	Результат партии (баллы)	
			З	С
1				
2				
...				
10				

Проводя логические операции, такие как анализ, синтез и обобщение, учащиеся устанавливают связи между понятиями «элементарный исход», «сумма элементарных исходов», «случайное событие».

На третьем этапе необходимо установление новых связей и отношений данного понятия с другими и реализация применения формируемых понятий при решении нестандартных задач, в частности творческого характера, например задачи на умение предсказать ход явления по заданным условиям.

При формировании понятий «элементарный исход», «сумма элементарных исходов», «случайное событие» на третьем этапе в 5–6 классах целесообразно применять следующую дидактическую игру. Учащиеся объединяются в команды по два человека. Необходимое оборудование для команды: два игральных кубика, таблица результатов (табл. 2), зеленый и синий двухсторонние квадраты. Каждый член команды выбирает квадрат. Участники одновременно подбрасывают два игральных кубика. При выпадении хотя бы одного четного числа очков балл присуждается учащемуся, выбравшему зеленый цвет, в противном случае – выбравшему синий цвет.

Каждой команде класса необходимо совершить 10 (количество партий) подбрасываний кубика, записывая свои очки и баллы в таблицу 2. По завершении этой серии учащиеся подсчитывают количество баллов, набранное каждым участником команды, и победитель поднимает квадрат своего цвета (в случае ничьи проводится дополнительное подбрасывание кубика). Когда все пары продемонстрируют свой результат, учитель вместе с учащимися выясняет причину того, что большинство предъявленных квадратов – зеленые, и подводит

школьников к перечислению элементарных исходов данного испытания. Таким образом, учащиеся приходят к выводу, что эта игра не является справедливой. Дальнейшее обсуждение касается смены условия игры:

- Если произведение числа очков, выпавших на кубике, четное, то балл присуждается учащемуся, выбравшему синий цвет, если нечетное – выбравшему зеленый цвет. Справедлива ли такая игра?

- Как изменить условие испытания, чтобы игра была справедливой?

В организованном учителем обсуждении результатов игр школьники приходят к выводу о необходимости выявления элементарных исходов в испытаниях. Знание количества способствующих выигрышу элементарных исходов помогут учащимся выбрать правильную стратегию.

В качестве домашнего задания школьникам предлагается проверить справедливость модифицированной игры «камень-ножницы-бумага»: будет ли справедливой игра «камень-ножницы-бумага», если первому игроку нельзя «выкидывать камень», а второму – «бумагу»?

Создание проблемной ситуации в этих играх позволяет подвести учащихся к необходимости введения новых понятий – «частоты случайных событий» и «вероятности случайных событий».

Исключение из процесса формирования основных понятий вероятностно-статистической линии хотя бы одного из этапов приводит к недостаткам в усвоении этих понятий учащимися (отсутствие связей между понятиями, неумение использовать их в практической жизни и др.) и, что немаловажно, вызывает трудности по оперированию понятиями при решении различного рода задач, и прежде всего нестандартных и прикладных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бодряков В. Ю. Об одной насущной проблеме математического педагогического образования учителей // Математика в школе. 2013. № 7. С. 32–40.
2. Булычев В. А., Бунимович Е. А. Изучение теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики : программа для курсов повышения квалификации учителей // Математика в школе. 2003. № 4.
3. Бунимович Е. А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе. 2002. № 4.
4. Бунимович Е. А. Теория и практика преподавания вероятности и статистики в российской школе // Математика. 2009. № 14.
5. Высоцкий И. Р., Яценко И. В. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики // Математика в школе. 2014. № 5. С. 32–43.
6. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1990.
7. Демина Т. Ю. Вероятность события // Математика в школе. 2011. № 5. С. 27–33.
8. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика : 5 кл. : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений. 9-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2009.
9. Приказ М-ва образования Российской Федерации от 19.12.2012 № 1067 «Об утверждении федеральных перечней учебников, рекомендованных (допущенных) к использованию в образовательном процессе в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы общего образования и имеющих государственную аккредитацию, на 2013/14 учебный год».
10. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М. : Просвещение, 2002.

11. Селютин В. Д. О подготовке учителей к обучению школьников стохастике // Математика в школе. 2003. № 4.
12. Селютин В. Д. О формировании первоначальных стохастических представлений // Математика в школе. 2003. № 3.
13. Усова А. В. Психолого-дидактические основы формирования у учащихся научных понятий : учеб. пособие. 4.1. Челябинск : ЧГПИ, 1978.
14. Фалин Г. И., Фалин А. И. Описательная статистика на ГИА // Математика в школе. 2011. № 7. С. 21–30.

Статью рекомендует канд. техн. наук, доц. М. В. Лапенко.