УДК 378.147+378.6:37
ББК Ч448.98-5 ГСНТИ 14.35.09 Код ВАК 13.00.02

И. Г. Липатникова, Ю. Н. Мухин
Екатеринбург

Т. Ю. Паршина
Нижний Тагил

ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К РЕАЛИЗАЦИИ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИНИИ «ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА» ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: элементарная математика; эвристическая задача; математическая логика.

АННОТАЦИЯ. Обосновывается необходимость обучения математическому языку в процессе обучения элементарной математике. В качестве средства обучения математическому языку предлагается эвристическая задача. Анализ психолого-педагогических работ показывает, что важное место в процессе поиска решения эвристических задач занимает переформулирование их текстов. Тексты задач предлагается преобразовывать с опорой на формализацию суждений с помощью языков логики высказываний, логики предикатов и изоморфизма интерпретаций. Даются примеры эвристических задач элементарной математики, преобразование текстов которых выполнено с использованием указанных средств математической логики.

I. G. Lipatnikova, Y. N. Muhin
Ekaterinburg

T. Y. Parshina
Nizhniy Tagil

TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS FOR REALIZATION OF THE SUBSTANTIAL AND METHODICAL LINE «LOGIC AND SETS» IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

KEY WORDS: elementary Mathematics; heuristic mathematical problem; mathematical logic.

ABSTRAPT. The necessity of learning mathematical language in teaching elementary mathematics is proved. Heuristic task is proposed as a means of teaching mathematical language. Analysis of psychological and educational works shows that an important place in the search for heuristic solutions of problems is a reformulation of the texts. It is proposed to reword the tasks with the stress on formality of the statements by means of logic of the statements, logc of predicative elements and isomorphism of interpretations. The article provides examples of heuristic problems of elementary mathematics, their texts are transformed according to the means of mathematic logic.

Федеральный образовательный стандарт общего образования второго поколения предполагает новый подход к организации процесса обучения в школе, содержанию обучения математике и к критериям оценки конечных результатов образовательного процесса [6]. В частности, содержание математического образования применительно к основной школе представлено в виде следующих содержательных разделов математики: арифметика; алгебра; функции; вероятность и статистика; геометрия [4]. Наряду с этим в содержание основного общего образования включены два дополнительных методологических раздела: логика и множества; математика в историческом развитии. Включение указанных разделов в школьный курс математики обосновано целью общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся. Содержание каждого из этих разделов школьного курса математики разворачивается в содержательно-методическую линию, пронизывающую все основные разделы содержания математического образования на основной и старшей ступени обучения.

Одной из новых содержательно-методических линий является линия «Логика и множества», которая раскрывает цель овладения некоторыми элементами универсального математического языка. Исходя из этого в математическом образовании, спроектированном в рамках Федерального образовательного стандарта общего образования второго поколения, на первое место выдвигается задача подготовки учителей математики к реализации новой содержательно-методической линии в школьном курсе математики.

На математических факультетах педагогических вузов математическая логика ведется в отрыве от математических дисциплин. В связи с этим у будущего учителя математики не в полной мере формируется целостное представление о математике как универсальном языке науки. Вследствие этого студент испытывает затруднения в применении полученных знаний в данной предметной области. Однако язык логики используется во всех математических дисциплинах: математическом анализе, алгебре, теории чисел, числовых системах, геометрии и др.

Рассматривая резервы математической подготовки будущих учителей математики, обратим внимание на курс элементарной математики, который позволяет создать условия для понимания будущими учителями математики значимости использования математического языка в будущей профессиональной деятельности. Вместе с тем этот курс обладает особенностями, выгодно отличающими его от других математических курсов. Во-первых, его логическая структура сходна со школьным курсом математики; во-вторых, совпадающая терминология трактуется шире и глубже, чем в школе, что позволяет формировать у студентов опыт использования языкового аппарата математики для преобразования информации.

Известно, что математика располагает специальными средствами, позволяющими проверить правомерность преобразования, — это формализация суждений с помощью языка логики высказываний и языка логики предикатов и переход к другим языкам представления математической информации с помощью изоморфизма интерпретаций. Результативность применения этих средств обеспечивается целенаправленным и систематическим их использованием в процессе обучения элементарной математике.

Остановимся подробнее на каждом из них. Высказыванием в математике называется повествовательное предложение, о котором можно судить истинно оно или ложно. Над высказываниями определяют логические операции: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции — по известным правилам, что рассмотрено, к примеру, в учебных пособиях для студентов педагогических вузов. Средства, предоставляемые логикой высказываний, оказываются недостаточными для анализа некоторых математических рассуждений. Полезным может оказаться обращение к языку логики предикатов. Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называют предикатами. Над предикатами определяют те же логические операции, что и над высказываниями по аналогичным правилам. Для них справедливы аналогичные законы логики предикатов. Кроме того, для предикатов определены две специальные операции — связывания перенной кванторами общности и существования. Эти операции подчиняются своим законам:

$$\neg\left(\forall x\, A(x)\right) \leftrightarrow \exists x\left(\neg A(x)\right);$$

$$\neg\left(\exists x\, A(x)\right) \leftrightarrow \forall x\left(\neg A(x)\right);$$

$$\forall x\, A(x) \leftrightarrow \neg\left(\exists x\left(\neg A(x)\right)\right);$$

$$\exists x\, A(x) \leftrightarrow \neg\left(\forall x\left(\neg A(x)\right)\right);$$

$$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \leftrightarrow \exists x\left(A(x) \vee B(x)\right);$$

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \leftrightarrow \forall x\left(A(x) \wedge B(x)\right).$$

Под изоморфизмом двух алгебраических структур в математике понимается существование между их основными множествами биективного отображения, сохраняющего операции и отношения, определенные в структурах [2; 3]. Текст математической задачи может быть интерпретирован в рамках различных математических теорий, например теории решения уравнений (неравенств) или теории векторной алгебры. Обозначим T_1 теорию, на языке которой задача представлена до изменения ее текста, а T_2 — теорию, на языке которой задача представлена после изменения ее текста. Под изоморфизмом интерпретаций будем понимать существование биективного отображения между областями, на которых построены соответственно T_1 и T_2, причем это отображение должно сохранить предметную постоянную, выполнимость предикатов и операций над ними.

Проверка преобразованной информации с помощью формализации помогает студенту в процессе обучения элементарной математике грамотно осуществить контроль учебно-познавательной деятельности, коррекцию деятельности по решению математической задачи: принятия цели, построения модели значимых условий, составления программы исполнительских действий.

В качестве средства обучения языковому аппарату математики предлагаем рассматривать эвристические задачи. Под *эвристической задачей* понимается задача, поиск решения которой направлен на «открытие» метода решения и самостоятельное овладение новыми способами математической деятельности и математическим языком. Решение эвристических задач предполагает преобразование представленной информации (разбиение на подзадачи, введение в условие вспомогательных элементов, изменение языка представления математической информации с помощью языков логики высказываний и логики предикатов или изоморфизма интерпретаций), выбор средств, удобных для их решения.

Вопросам применения эвристических

задач в процессе обучения математике посвящены работы Г. Д. Балка, Б. В. Гнеденко, Г. В. Дорофеева, Н. И. Зильберберга, Ю. М. Колягина, Ю. М. Кулюткина, Т. Н. Мираковой, Ю. А. Паланта, Д. Пойа, Г. И. Саранцева, Е. И. Скафа, Л. М. Фридмана, Р. Г. Хазанкина, С. И. Шапиро, П. М. Эрдниева и др. При этом до сих пор возможности эвристических математических задач как средства обучения математическому языку недостаточно изучены.

Под эвристической задачей Е. И. Скафа [5] понимает такую, которая предполагает самостоятельное формулирование способа ее решения, в процессе которого ученик попадает в ситуацию проявления своих эвристических позиций. Разработанные автором системы эвристических математических задач приводят к созданию учащимися личного опыта в процессе обучения математике, приобретению приемов учебно-познавательной эвристической деятельности, что способствует формированию самоорганизации личности.

С. С. Бакулевская [1] рассматривает эвристическую задачу как ситуацию становления интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника. Эвристическая задача трактуется как ситуация проявления эвристических позиций старшеклассника в учебном процессе. Становление интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника сводится к выработке учащимися собственного опыта развития познавательной деятельности в процессе проживания специально созданных учебных ситуаций.

Необходимым условием овладения умением находить решения эвристических задач Л. М. Фридман и Е. Н. Турецкий считают глубокий и постоянный самоанализ действий по решению задачи и тренировку в решении разнообразных задач. При поиске решения они рекомендуют «действовать в следующих направлениях: а) вычленять из задачи или разбивать ее на подзадачи стандартного вида (способ разбиения); б) ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов); в) переформулировать ее, заменить равносильной задачей (способ моделирования)» [7. С. 78]. Процесс обучения всегда сопряжен с поиском, выбором, извлечением и интерпретацией информации, повышением ее уровня и структурированием. К примеру, в процессе решения эвристической задачи студент должен преобразовать представленную информацию, а затем подобрать средства, удобные для ее решения, обратиться к различным языкам представления математической информации. Работа с эвристическими задачами осуществляется в процессе обучения элементарной математике, которая позволяет одновременно представлять информацию на языках уравнений, неравенств, функций, графических образов, естественном языке. Преобразование информации может происходить как в рамках одного языка, так и как переход к другому. В результате возникает новая задача, которая должна быть равносильной исходной.

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Задача. Используя язык логики высказываний, найдите ошибки в «решении» уравнения

$$\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0.$$

Решение

$\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0;$

$x^2\sqrt{x-1}+2x^2=0;$ (1)

$x^2\left(\sqrt{x-1}+2\right)=0;$ (2)

$x^2=0;$ (3)

$x=0.$ (4)

Ответ: $x=0$.

Примерный вариант решения. Подставим найденный корень 0 в исходное уравнение и в каждое из уравнений цепочки, после этого определим истинностное значение каждого из высказываний:

$\sqrt{0^4(0-1)}+2\cdot0^2=0$ истина

$0^2\sqrt{0-1}+2\cdot0^2=0;$ (1) ложь, так как не существует число $\sqrt{0-1}$

$0^2\left(\sqrt{0-1}+2\right)=0;$ (2) ложь, так как не существует число $\sqrt{0-1}$

$0^2=0;$ (3) истина

$0=0.$ (4) истина.

Смена истинностного значения высказывания говорит о прохождении на соответствующем этапе решения ошибки. Таким образом, первая ошибка допущена на первом шаге при вынесении множителя x^2 из-под корня, вторая — при делении на положительное $\sqrt{x-1}+2$. Ошибки найдены.

С целью обучения решению задач, требующих перевода текста задачи с языка функций или естественного языка на язык уравнений или неравенств, целесообразно применять язык логики предикатов. Приведем пример одной из таких задач.

Задача. При каких значениях параметра a нули функции

$$f(x)=x^2+2(a-2)x+2a-5$$

расположены между числами -2 и 4? Запишите на языке логики предикатов текст задачи. Прочитайте и запишите новую формулировку задачи. Составьте план решения и решите полученную задачу.

Решение может быть таким. В условии задачи говорится, что как только значение переменной x обращает в нуль функцию, то оно обязательно находится между числами -2 и 4. Имеем дело с логическим следствием. Пусть A — искомое множество значений параметра. Запись текста задачи на языке предикатов будет:

$$\underset{a\in A}{\forall a}\ \forall x\ \left(f(x)=0\ \Rightarrow\ -2<x<4\right), \text{ или}$$

$$\underset{a\in A}{\forall a}\ \forall x\ \left(x^2+2(a-2)x+2a-5=0\ \Rightarrow\ -2<x<4\right).$$

Прочитаем: «При всех значениях параметра a каждый корень уравнения $x^2+2(a-2)x+2a-5=0$ находится в интервале $(-2;\ 4)$».

Для решения задачи надо рассмотреть два случая: посылка импликации истинна (уравнение имеет корни) и посылка импликации ложна (уравнение не имеет корней). В первом случае заключение должно быть истинно, во втором — истинностное значение заключения не играет роли. Рассмотрим первый случай. Найдем корни уравнения в зависимости от параметра и потребуем, чтобы каждый из них попадал в интервал $(-2;\ 4)$. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2a+4 \\ x_1\cdot x_2=2a-5 \end{cases}.$$

Можно заметить, что это числа $-2a+5$ и -1. Второй корень не зависит от a и находится в интервале $(-2;\ 4)$. Осталось решить неравенство

$$-2<-2a+5<4.$$

Решаем:

$-2-5<-2a<4-5$;

$-7<-2a<-1$;

$\frac{1}{2}<a<\frac{7}{2}$.

Разобранный случай показывает, что уравнение всегда имеет корни, т. е. вариант ложной посылки исключен.

Ответ: $a\in(0{,}5;\ 3{,}5)$.

Преобразования текстов задач, приводящие к другому языку представления математической информации не всегда удобно осуществлять с помощью языков логики высказываний или логики предикатов. В некоторых случаях эффективной оказывается реализация идеи изоморфизма. В процессе обучения элементарной математике целесообразно применять изоморфизм интерпретаций для обучения студентов решению задач, требующих перевода текста задачи с языка уравнений (неравенств) на язык векторов или на язык графических образов. Приведем примеры такой задачи.

Задача с использованием изоморфизма интерпретаций для перевода текста задачи с языка чисел на язык векторов. «Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ t^2+z^2=9 \\ xt+yz\ge 6 \end{cases}$$

найдите такие, при каждом из которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение. Подберите подходящий изоморфизм и переведите задачу на язык векторов. Решите полученную задачу». Решение может быть таким.

Если уравнение содержит две переменные, то множество его решений можно воспринимать как множество упорядоченных пар. Рассмотрим множество R^2 и зададим на нем две функции: f и g так:

$f:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$

по закону $(a;\ b)\xrightarrow{f} a^2+b^2$,

$g:\mathrm{R}^2\times\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ по закону

$((a;\ b);\ (c;\ d))\xrightarrow{g} ac+bd$.

Функцию f можно рассматривать как трехместный предикат $F(x,\ y,\ z)=\{z=x^2+y^2\}$, а функцию g как пятиместный предикат $G(p,\ q,\ r,\ s,\ t)=\{t=pq+rs\}$.

Обозначим V_2 множество векторов плоскости (вектор понимаем как класс сонаправленных и имеющих одинаковые длины отрезков). В этом пространстве введем систему координат Oxy с ортонормированным базисом $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$, тогда скалярное произведение двух векторов будет вычисляться как сумма произведений одноименных координат, а квадрат длины вектора будет равен сумме квадратов его координат. Введем предикаты $F'=\left\{\left|\vec{n}\right|^2=n_x^2+n_y^2\right\}$ и $G'=\left\{\vec{n}\cdot\vec{m}=n_x\cdot m_x+n_y\cdot m_y\right\}$.

Зададим отображение h множества R^2 во множество V_2, сопоставив каждой паре $(a;\ b)$ вектор $\vec{n}$, имеющий в базисе $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ координаты $(a;\ b)$. Получим биекцию. При этом отображении предикат F будет выполним тогда и только тогда, когда выполним предикат F', а предикат G выполним тогда и только тогда, когда выполним предикат G'. Другими словами, h — изоморфизм.

Вводим векторы $\vec{m}(x;\ y)$ и $\vec{n}(t;\ z)$.

Первое уравнение превращается в равенство $\left|\vec{m}\right|^2 = 4$, или $\left|\vec{m}\right| = 2$, второе уравнение — в равенство $\left|\vec{n}\right| = 3$, неравенство — в неравенство $\vec{m} \cdot \vec{n} \geq 6$. Требование задачи остается тем же.

Эта интерпретация позволяет последнее неравенство превратить в уравнение. Действительно,
$\vec{m} \cdot \vec{n} = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(\vec{m}; \hat{\ } \vec{n}\right) \leq \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 6 \cdot$

Имеем, с одной стороны, $\vec{m} \cdot \vec{n} \geq 6$, а с другой — $\vec{m} \cdot \vec{n} \leq 6$. Значит, $\vec{m} \cdot \vec{n} = 6$ и $\vec{m} \cdot \vec{n} = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|$. Последнее возможно только, если угол между векторами равен нулю, т. е. векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены: найдется положительное k такое, что $\vec{m} = k\vec{n}$. Переходя к длинам в последнем равенстве, получим $\left|\vec{m}\right| = k\left|\vec{n}\right|$, откуда $k = \frac{\left|\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{2}{3}$. Переходим в равенстве $\vec{m} = \frac{2}{3}\vec{n}$ к координатам: $x = \frac{2}{3}t$, $y = \frac{2}{3}z$. Составляем требуемую сумму $x + z = \frac{2}{3}t + z$. Введем вспомогательный вектор $\vec{s}\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. Последнее равенство можно записать так $x + z = \vec{s} \cdot \vec{n}$. Так как $\vec{s} \cdot \vec{n} = \left|\vec{s}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(\vec{s}; \hat{\ } \vec{n}\right)$, то наибольшее значение суммы будет при $\cos\left(\vec{s}; \hat{\ } \vec{n}\right) = 1$, т. е. векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ сонаправлены. Итак, найдется положительное число q такое, что $\vec{n} = q\vec{s}$, откуда $q = \frac{\left|\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$. Значит, $\vec{n} = \frac{9}{\sqrt{13}}\vec{s}$, и, переходя к координатам, получаем $t = \frac{9}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{3}$, $t = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \frac{9}{\sqrt{13}} \cdot 1$, $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$. Учитывая $x = \frac{2}{3}t$ и $y = \frac{2}{3}z$, находим $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}}$, $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $t = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$.

Как показал анализ, в процесс обучения студентов педвуза элементарной математике целесообразно включать эвристические задачи, которые предполагают преобразования математического текста с использованием возможностей математической логики. Это позволит будущему учителю математики обогатить опыт анализа математической информации, расширить представления о применении математического языка и целенаправленно реализовать содержательно-методическую логическую линию школьного курса математики в будущей профессиональной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. БАКУЛЕВСКАЯ С. С. Становление интеллектуально-творческой деятельности старшеклассника в процессе решения эвристических задач : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Волгоград, 2001.
2. КОСТРИКИН А. И. Введение в алгебру. Ч. 1 : Основы алгебры. М. : МЦНМО, 2009.
3. КУЛИКОВ Л. Я. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие для пед. институтов. М. : Высш. школа, 1979.
4. ПРИМЕРНЫЕ программы по учебным предметам. Математика 5—9 классы URL: http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2629.
5. СКАФА Е. И. Эвристическое обучение математике в контексте синергетического подхода. September 10—12, 2010, Bachinovo, Bulgaria. URL: http://www.fmi-plovdiv.org/GetResource?id=681.
6. ФЕДЕРАЛЬНЫЙ государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению 050100 Педагогическое образование. 2009. URL: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_09/prm788-1.pdf.
7. ФРИДМАН Л. М., ТУРЕЦКИЙ Е. Н. Как научиться решать задачи : кн. для учащихся ст. классов сред. шк. М. : Просвещение, 1989.

Статью рекомендует д-р пед. наук, проф. А. П. Усольцев