УДК 378.016:517.2

Плотникова Ю.А.

О ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ К ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Аннотация

Рассматриваются методические аспекты преподавания курса математического анализа студентам экономического бакалавриата. Приводятся примеры экономической интерпретации базовых понятий математического анализа. Представлены используемые в педагогической практике примеры простейших экономико-математических моделей, при построении которых используются понятия и методы математического анализа.

Ключевые слова: математический анализ, экономико-математические модели, студенты, методика преподавания математики, методика математики в вузе, бакалавриат.

Plotnikova Yu.A.

ON THE TRAINING OF STUDENTS OF ECONOMIC DIRECTIONS TO ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING IN THE PROCESS OF STUDYING THE DISCIPLINE “MATHEMATICAL ANALYSIS”

Abstract

The methodical aspects of teaching mathematical analysis are considered. The aspects are intended for teaching undergraduate students of economic training profiles. Examples of the economic interpretation of the basic mathematical analysis concepts are given. Practice examples of the simplest economic-and-mathematical models used in teaching are presented. The construction of these models uses the concepts and methods of mathematical analysis.

Keywords: mathematical analysis, economic and mathematical models, students, methods of teaching mathematics, methods of mathematics in high school, undergraduate.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Математический анализ, наряду с линейной алгеброй, теорией вероятностей, математической статистикой и методами оптимальных решений, является одним из «китов» математической подготовки для студентов экономических направлений бакалавриата. Профессиональный уровень современного экономиста во многом определяется его умением анализировать полученную информацию и принимать решение в результате анализа, пониманием экономических процессов, способностью строить экономико-математические модели, что в свою очередь напрямую зависит от успешного овладения математическим аппаратом в процессе его обучения.

Математический анализ воспринимается многими студентами-экономистами как достаточно сложная для усвоения дисциплина. При подготовке к занятиям и организации самостоятельной работы студентов перед преподавателем стоит достаточно сложная задача достичь сразу нескольких целей. Во-первых, необходимо, не упрощая сам материал, суметь доступно познакомить студентов с основными понятиями и методами математического анализа. Во-вторых, добиться того, чтобы у студентов дисциплина вызывала интерес и сформировалось понимание ее важности в процессе обучения. Последняя цель (связанная с предыдущей) – продемонстрировать связь математического анализа с экономическими дисциплинами. В связи с вышесказанным представляется актуальной проблема: Как выстроить процесс преподавания дисциплины студентам экономических направлений подготовки для достижения перечисленных целей? В статье автор делится опытом по решению данной проблемы в части последней из целей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Согласно ФГОС ВО для направления подготовки «Экономика» (уровень бакалавриата) одной из профессиональных компетенций, которыми должен обладать выпускник, является «владение способностью на основе описанных экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели и интерпретировать полученные результаты». Изучение дисциплины «Математический анализ» дает немалые возможности для ее формирования. Остановимся на некоторых методических аспектах при реализации этой задачи, из которых наиболее важными представляются два.

Первый аспект – построение преподавателем достаточного количества «мостиков» (в местах, где это возможно сделать) между базовыми понятиями математического анализа и их экономическими интерпретациями. Второй аспект – включение в курс задач с экономической компонентой. С точки зрения содержания такие задачи могут представлять собой несложные экономико-математические модели, а с точки зрения решения – стандартные задачи математического анализа. Об экономико-математических моделях см., напр., [4].

Остановимся на ряде моментов. Одно из ключевых понятий математического анализа – понятие функции. При изучении тем «Функция одной переменной, ее свойства и график» и «Функция нескольких переменных» важно сформировать у студентов понимание, что функции позволяют описывать многие экономические процессы. При этом обуславливающие эти процессы факторы выступают как независимые переменные, а графики функций являются своеобразными «портретами» процессов. При построении экономико-математических моделей используются различные классы функций. Изучив свойства и графики, характерные для основных элементарных функций, студенты могут использовать полученные знания при описании экономических процессов. Например, для нахождения равновесной цены важно уметь строить кривые спроса и предложения и находить точку их пересечения и т. д. Изучение свойств и графиков тригонометрических функций позволяет в дальнейшем моделировать периодические экономические процессы, проводить анализ временных рядов.

Кроме того, преподаватель может приводить в качестве иллюстраций различные функции одной или нескольких переменных, используемые в экономике. Так, в экономико-математическом моделировании зависимость между количеством выпущенной продукции и факторами производства описывается с помощью производственных функций. Примером такой функции может служить функция Кобба-Дугласа $y = ax_1^b x_2^{1-b}$ $(a > 0, 0 < b < 1)$, где независимыми переменными (факторами) являются x_1 – затраты труда и x_2 – объем капитала. Свойство возрастания степенных функций с положительным аргументом в этом случае интерпретируется как рост выпуска продукции при увеличении затрат одного из факторов и неизменности другого. При описании функции полезности потребителя вида $f(x_1, x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2$, где x_1, x_2 – объемы потребляемых доходов, важно знать свойства логарифмических функций.

Достаточно широкий спектр функций, используемых в экономических моделях, открывает для преподавателя большие возможности для наглядной иллюстрации взаимосвязи указанных тем дисциплины с моделированием экономических процессов.

Понятие выпуклой функции также хорошо трактуется с экономических позиций. Если, к примеру, функция одной переменной описывает изменение во времени некоторой экономической величины (уровня потребительских цен, заработной платы, количества произведенной продукции и т.п.), то в случае ее возрастания выпуклость вверх означает замедление, а выпуклость вниз – ускорение темпов роста. Позже, при изучении второй производной функции и ее связи с выпуклостью функции, это наблюдение дает возможность интерпретировать знак второй производной с позиции экономико-математических моделей. В связи с этим заметим, что в формулировке многих экономических законов явно или неявно возникают либо функции одной переменной, выпуклые вверх, либо функции нескольких переменных, выпуклые вверх по каждой из этих переменных. Так, известный в экономической теории закон Госсена [6, гл. 9] о предельной убывающей полезности говорит о том, что функция полезности выпукла вверх по каждой переменной, т.е. ее частные производные второго порядка отрицательны.

Раздел «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» базируется на понятии производной функции. В экономико-математическом моделировании данное понятие находит следующие применения: в описании производительности труда (как производной объема произведенной продукции по времени); в описании предельных издержек и предельного дохода; для нахождения эластичности функции, в частности, эластичности спроса и предложения; в описании ряда других явлений. Приведем пример задачи [8], которая предлагалась студентам на занятиях по математическому анализу.

Пример 1. Функция $D(P) = 0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}1P^2}$ *моделирует зависимость спроса* D *от цены товара* P. *Найдите значение эластичности спроса* $E_D(P)$, *когда цена товара* $P = 4$ *денежным единицам. Укажите, является ли спрос* *эластичным, нейтральным или неэластичным при данном значении цены.*

Перед решением задачи студенты знакомятся с формулой для нахождения (предельной) эластичности $E_D(P)$ величины D относительно величины P:

$$E_D(P) = \frac{P}{D(P)} \cdot \frac{d(D(P))}{dP}.$$

Видится важным потратить некоторое время и пояснить студентам смысл правой части формулы и мотивацию для использования термина «эластичность». Основная часть решения использует стандартные процедуры математического анализа. В финальной части, найдя эластичность при заданной цене товара $P = 4$, студенты могут интерпретировать результат, т.е. сделать вывод, на сколько процентов изменится спрос при изменении данной цены на 1%. Кроме того, сравнив $|E_D(P)|$ с единицей, они могут дать ответ на вопрос, эластичен, нейтрален или неэластичен спрос относительно цены.

Особую роль при изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» играют оптимизационные задачи, в которых требуется найти наибольшее (наименьшее) значение функции на некотором промежутке (см., напр., [11]). Навык решения таких задач используется при поиске наибольшей прибыли, наименьших издержек и т.п. в ряде экономико-математических моделей. Приведем пример простейшей модели.

Пример 2. Спрос на продукцию производителя-монополиста описывается функцией $D(P) = 120 - 2P$, *а издержки – функцией* $S(P) = 1{,}6P^2 + 1$, P *– цена единицы продукции. Какую цену за единицу продукции нужно назначить производителю, чтобы получать наибольшую прибыль?*

При изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» важным является формирование умения находить частные производные функций, исследовать функцию, а также отыскивать наибольшее и наименьшее ее значения на заданном множестве (см., напр., [1]). Такие умения необходимы в следующих ситуациях: для записи функции Лагранжа и составления условий Куна-Таккера при решении выпуклых экстремальных задач (или задач выпуклого программирования); для понимания сути метода наименьших квадратов; для нахождения предельной нормы замещения одного товара (услуги) другим товаром (услугой) из одного набора; для других понятий и методов, используемых при изучении экономико-математических моделей. На занятии можно рассмотреть составление функции Лагранжа и нахождение ее частных производных. Приведем пример задания.

Пример 3. Производственная функция предприятия имеет вид

$$y = 3x_1^{0{,}2}x_2^{0{,}8},$$

x_1 и x_2 *– объемы затраченных ресурсов первого и второго вида,* y *– объем выпущенной продукции. Пусть цены ресурсов первого и второго вида есть* $p_1 = 60$ *и* $p_2 = 6$ *денежных единиц соответственно, а общая стоимость затрат ресурсов –* 120 *денежных единиц. Определить объем затрат* *каждого из ресурсов, при которых объем выпуска продукции является максимальным.*

В моделях экономической динамики широкое применение находят дифференциальные уравнения (см., напр., [5, гл. 12]). Поэтому, при изучении раздела «Дифференциальные уравнения» имеет смысл предложить студентам примеры с экономическим содержанием, в которых для описания процесса нужно построить математическую модель, составив, а затем решив задачу Коши. Приведем пример из педагогической практики [8].

Пример 4. Рассмотрим следующую математическую модель, описывающую рост количества реализуемой продукции. Пусть t – время, $Q(t)$ – количество продукции, реализованной к моменту времени t. В предположении о ненасыщаемости рынка (*модель естественного роста*) *можно считать скорость изменения величины $Q(t)$ пропорциональной самой величине с постоянным коэффициентом пропорциональности $k>0$. Считая, что $k=2$, а значение величины Q в момент $t_0=1$ есть $Q_0=500$, требуется*:

- *составить дифференциальное уравнение динамики изменения количества выпускаемой продукции*;

- *решить полученное уравнение и написать уравнение зависимости количества реализованной продукции от времени*;

- *найти количество продукции, реализованной за время $t_1=1{,}6$.*

Подобные задания формируют представление о том, как использовать дифференциальные уравнения для описания экономических процессов, позволяют преподавателю наглядно проиллюстрировать применение техники интегрирования, показывают прикладной смысл таких понятий, как общее и частное решение дифференциального уравнения [9]. Можно также рассмотреть версию примера 4 для насыщаемого рынка (*модель конкурентного рынка*). В этом случае вместо постоянного коэффициента $k>0$ рассматривается некоторая убывающая функция $k(t)>0$. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к дифференциальным уравнениям, можно найти в работах [2; 12].

В дополнение к основным аспектам отметим, что при формировании умений, необходимых для экономико-математического моделирования, помимо традиционного решения задач на практических занятиях и при выполнении домашних работ, могут использоваться тесты (см., напр., [3]), в частности, онлайн-тесты, а также другие методы e-learning.

Используя электронный курс дисциплины «Математический анализ» в учебном процессе, скажем, что он является неплохим помощником студенту и дополнением к традиционным занятиям. Решение же в рамках курса тестовых заданий в режиме он-лайн позволяет студентам понять пробелы в изучаемых разделах и организовать самоподготовку к промежуточной аттестации. В случае самостоятельного активного участия в он-лайн заданиях курса они будут комфортнее и увереннее чувствовать себя на экзамене. Отметим, что в тестах по разделам математического анализа одним из предпочитаемых видов вопросов являются вычисляемые вопросы, особенно вопросы в виде задач. В формировании таких вопросов участвуют входные переменные, для значений которых преподаватель в процессе создания вопроса задает допустимый диапазон [10]. Использование форума и возможности личных сообщений решает проблему непосредственного общения с преподавателем при возникающих вопросах, а наличие в электронном курсе всех лекций дисциплины позволяет ликвидировать отставание в случае пропусков занятий. Электронное учебное пособие, набранное в издательской системе TEX, после скачивания позволяет студентам пользоваться системой внутренних ссылок в файле [7], помогая им быстрее разобраться со структурой материала и облегчая процесс его усвоения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в процессе обучения дисциплине математический анализ преподавателем решается проблема достижения нескольких целей. Одна из целей – демонстрация связи математического анализа с другими дисциплинами. Построение «мостиков» между базовыми понятиями дисциплины и их экономическими интерпретациями, включение в курс задач с экономической компонентой и использование элементов e-learning позволяет достигать указанную цель и готовить студентов к будущей профессиональной деятельности в части экономико-математического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Балабаева Н. П., Энбом Е. А. Математический анализ. Функции многих переменных: учебное пособие. Самара: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2015. 119 с.

2. Клевина М. В., Кореева Е. Б. Анализ движения рабочей силы Самарской области с помощью дифференциальных уравнений // XIV Королевские чтения. Сборник трудов международной молодежной научной конференции. Самара: Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, 2017. С. 239.

3. Кокшарова Г. А., Ивановская В. Ю. Высшая математика: тесты для промежуточного контроля знаний у студентов экономических специальностей. Вологда-Молочное: Издательский центр Вологодской государственной молочнохозяйственной академии им. Н.В. Верещагина, 2005. 55 с.

4. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. М.: Юнити-Дана, 2005. 295 с.

5. Кремер Н. Ш. Математика для экономистов и менеджеров: учебник. М.: КноРус, 2015. 480 с.

6. Негиши Т. История экономической теории: учебник. М.: Аспект-Пресс, 1995. 462 с.

7. Плотников М. Г., Плотникова Ю. А. Издательская система TEX и ее использование при создании электронных учебных пособий // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. Вологда: ИП Киселев А.В., 2017. С. 337-340.

8. Плотников М. Г., Плотникова Ю. А. Математический анализ: учебное пособие. Вологда-Молочное: Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н.В. Верещагина, 2015. 165 с.

9. Плотникова Ю. А., Плотников М. Г., Дурова Е. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: методические указания. Вологда-Молочное: Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н.В. Верещагина, 2011. 37 с.

10. Плотникова Ю. А. Создание тестовых вопросов с параметрами для математических дисциплин в среде MOODLE // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2017. С. 154-156.

11. Плотникова Ю. А., Старковская Н. В. Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных. Вологда-Молочное: Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н.В. Верещагина, 2009. 55 с.

12. Ростова Е. П., Кореева Е. Б. Специальные разделы высшей математики: учебное пособие. Самара: Самарский университет, 2018. 84 с.