УДК 372.851

Мамалыга Р.Ф., Корелин Д.С.

КУРС «ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И САМОПОДОБНЫЕ ФРАКТАЛЫ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10 КЛАССОВ

Аннотация

В работе представлен опыт проведения занятий со школьниками по современному разделу геометрии. Здесь представлен один из подходов формирования понятия «самоподобный фрактал», в основе которого лежит идея преобразования плоскости. В статье рассматриваются композиции преобразований плоскости в аналитическом виде и их применение для получения «приближений» фракталов.

Ключевые слова: фракталы, преобразования плоскости, гомотетия, композиция преобразований, салфетка Серпинского, дерево Пифагора, методика геометрии в школе, методика преподавания геометрии, десятиклассники, старшеклассники, рекурсивные процедуры.

Mamalyga R.F., Korelin D.S.

THE COURSE “TRANSFORMATIONS OF THE PLANE AND SELF-SIMILAR FRACTALS” FOR PUPILS OF 10 CLASSES

Abstract

In work experience of training with school students according to the modern section of geometry is presented. Here one of approaches of formation of the concept “self-similar fractal” which cornerstone the idea of transformation of the plane is is presented. In article compositions of transformations of the plane in an analytical look and their application for receiving “approximations” of fractals are considered.

Keywords: fractals, plane transformations, homothety, composition of transformations, Sierpinski napkin, Pythagoras tree, geometry method at school, geometry teaching methods, tenth-graders, high school students, recursive procedures.

Сейчас фракталы – это одно из самых удивительных и красивых направлений современной науки: сплав математики, информатики и искусств. Однако, еще в середине 20 векафрактальные множества считались «патологическими и чудовищными». Сам термин появился только в 70-е годы прошлого столетия. Авторство принадлежит французскому ученому Бенуа Мандельброту. По его словам, фракталы являются неоспоримой моделью реальности, так как «подавляющее большинство объектов окружающей нас вселенной отнюдь не является гладкими, напротив, порой они отличаются весьма высокой шероховатостью» [4].

Несмотря на естественные трудности, возникающие при изучении фрактальной геометрии (сложность материала, отсутствие методической литературы), пропедевтика основных понятий (фрактал, аттрактор, размерность) осуществляется в отдельных школах во внеурочной деятельности, начиная с 6-7 классов [2; 3].

В данной статье представлен опыт проведения занятий со школьниками 10х классовМБОУ гимназии №5 в рамках кружковой деятельности.

Представим основные разделы разработанного курса «Преобразования плоскости и самоподобные фракталы».

I. Преобразования плоскости.

1. Углубленное изучение основных видов преобразований плоскости: движение и подобие. Особое внимание уделено свойствам сжимающих отображений. На данном этапе, школьники учатся находить неподвижные точки, писать аналитические формулы преобразований, в частности, выполняютследующие задания.

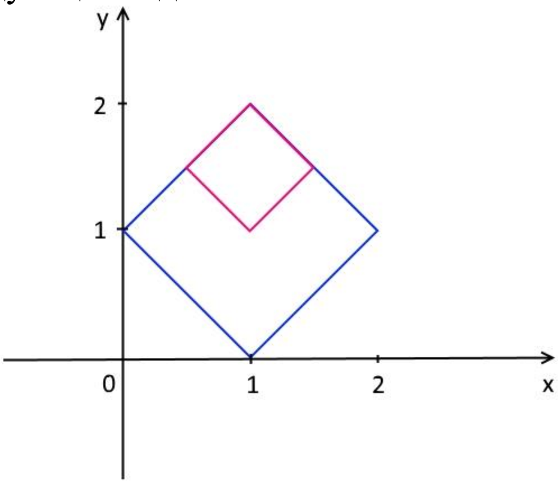

Рис. 1 Иллюстрация к заданию на составление формул гомотетии

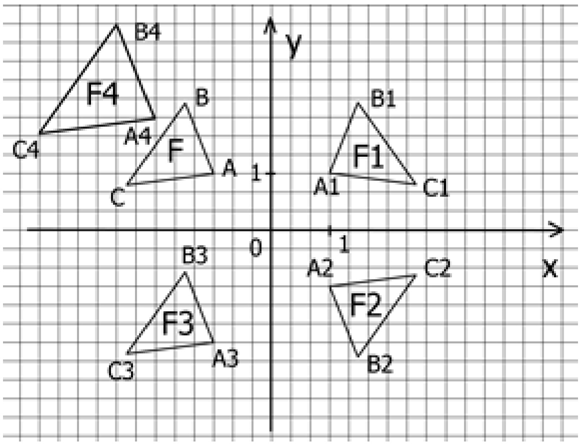

Рис. 2 Иллюстрация к заданиям на определение преобразований плоскости

- Составить формулы гомотетии плоскости, при которойодин квадрат отображается на другой (рис. 1) (в ответе записать все решения).
- Определить вид преобразования плоскости, при котором треугольник F отображается на треугольники F_1, F_2, F_3, F_4 (Рис. 2), записать формулы преобразований.

2.Знакомство с композицией преобразований плоскости. Умение находить образ и прообраз при композиции преобразований, составлять аналитические формулы, решать следующий тип заданий.

Умение находить образ и прообраз при композиции различных преобразований составляет основу решений следующих заданий.

- Определить вид преобразования плоскости, при котором один треугольник отображается на другой (для каждой пары фигур, изображенных на рисунке 2), записать формулы преобразований, заданных пар треугольников (например, F4F1).
- Найти образ фигуры «домик» (Рис. 3), полученный при композиции преобразований:

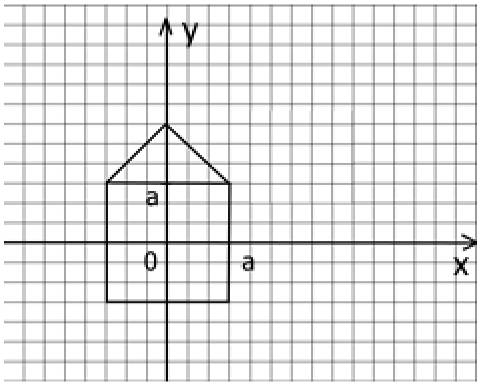

Рис. 3 Иллюстрация к заданию «образ домика»

$$f = T_{\vec{q}} \circ R_0^{45^\circ} \circ H_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{где } \vec{q} = (a, 2a);$$

- Дана фигура Ф (рис 4). Изобразите, на рисунке фигуру:

$$\Phi \cup T_{\overline{AB}} \circ H_A^{\frac{1}{2}}(\Phi).$$

Найти неподвижные точки этого преобразования

- Задача «об обидчивом Пете» [6] и «о ленивом Пете» [1].

Решение заданий, связанных с композицией гомотетии и различных видов движении, вызывали затруднения. Поэтому решение их, как правило, осуществлялось в двух видах: геометрическом и аналитическом.

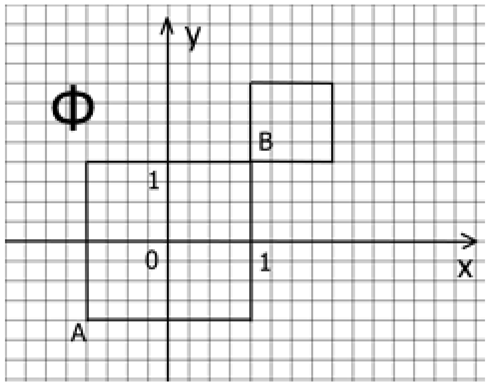

Рис. 4 Иллюстрация заданию «образ двух квадратов»

II. Самоподобные фракталы

Прежде чем сформулировать определение самоподобного фрактала, были исследованыотдельные примеры: «пыль Кантора», «салфетка Серпинского», «дерево Пифагора», «ожерелье Нефертити» [5]. Работа проводилась по следующему плану:

- графическое построение данногомножества (3-4 итерации);
- составление формул преобразований плоскости и применение их для получения образов исследуемого множества («приближения множества»);
- построение«приближений множества» на изучаемом языке программирования.

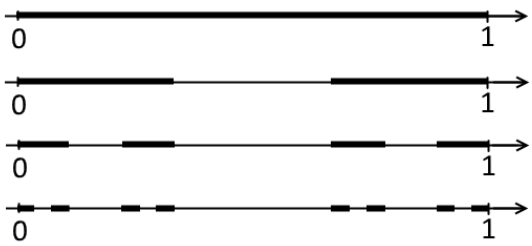

Рис. 5 Графическое построение множества пыль Кантора (3 итерации) дор

Исследование множества «пыль Кантора»

Шаг 1. Построение на первом этапе происходит с помощью выбрасывания средней трети отрезка [0,1], на втором и последующихэтапах выбрасываются средние трети получившихся на предыдущем этапе отрезков. Пересечение всех «приближений» называется «Пыль Кантора».

На рисунке 5 представлены результаты выбрасывания интервалов с длиной равной $\frac{1}{3}$ из отрезков, полученных на предыдущей итерации (три «приближения»).

Шаг 2. Составляем формулы гомотетий с коэффициентом $\frac{1}{3}$: f_1 (неподвижная точка с координатой 0) и f_2 (неподвижная точка с координатой 1). Отсюда $f_1[0,1] = [0,\frac{1}{3}]$ и $f_2[0,1] = [\frac{2}{3},1]$:

$$f_1(x)=\frac{1}{3}x\,; \qquad f_2(x)=\frac{x+2}{3}.$$

Применяем преобразования f_1, f_2 к отрезку [0, 1] (рис. 6) и к полученным отрезкам $\left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3},1\right]$. Получаем ожидаемый результат (рис. 7).

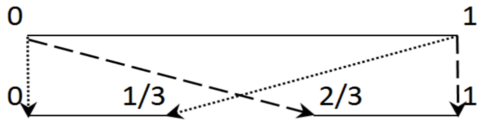

Рис. 6. Образы отрезка [0,1], полученные в результате преобразований f1 и f2

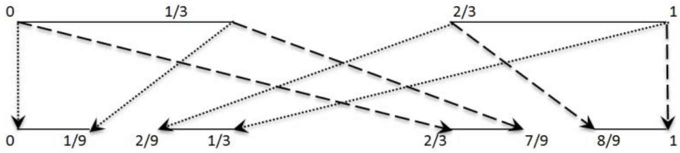

Рис. 7. Действие преобразований f1 и f2 на отрезки $\left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3},1\right]$

Шаг 3. Реализуем предыдущий шаг с помощью PascalABC, для произвольного количества итераций.

```
1       uses graphABC, crt ;
2       var k:integer;
3       procedure otrezok(x0,x1:real; y,k:integer);
4               begin
5                       line (round(x0*500)+100,y,round((x1*500))+100,y);
6                       if k>0 then
7                               begin
8                                       otrezok(x0/3,x1/3, y+20,k-1);
9                                       otrezok((x0+2)/3,(x1+2)/3, y+20,k-1);
10                              end;
11              end;
12      begin
13              write('количествоитераций: ');
14              readln(k);
15              otrezok(0,1,100,k);
16      end.
```

Программа (строки 12-16), запрашивает количество итераций (строка 14) и запускает рекурсивную процедуру otrezok (строка 15) со следующими параметрами:

- 0 и 1 – координаты начала и конца исходного отрезка;
- 100 – расстояние в пикселях от верхнего края окна, до отрезка;
- k – нужное количество итераций.

Процедура otrezok (строки 3-11) рисует отрезок по заданным координатам начала и конца (строка 5) и вызывает две процедуры otrezok (строки 8 и 9), координаты отрезка первой процедуры считаются по формуле преобразования f_1, а второй по f_2, переменная k уменьшается на единицу (при k=0 новые функции не вызываются)

Исследование множества «салфетка Серпинского»

Шаг 1. Построение на первом этапе происходит с помощью выбрасывания внутренних точек серединного треугольника (треугольник, образованный средними линиями исходного треугольника), на втором и последующих этапах выбрасываются внутренние точки серединных треугольников, получившихся на предыдущем этапе треугольников. Пересечение всех «приближений» называется «салфеткой Серпинского».

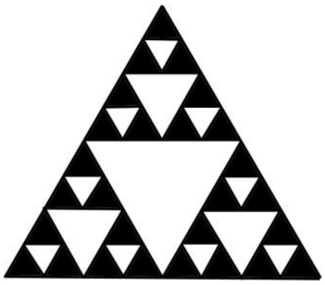

Рис. 8 Графическое построение множества «салфетка Серпинского» (3 итерации)

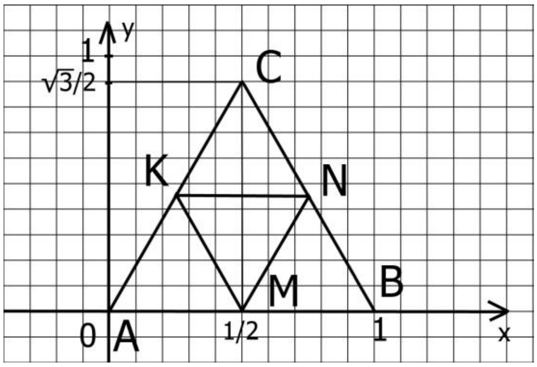

Рис 9. Образы треугольника ABC, полученные в результате преобразований f_1, f_2 и f_3

На рисунке 8 представлены результаты выбрасывания внутренних точек серединных треугольников из треугольников, полученных на предыдущей итерации.

Шаг 2. Составляем формулы гомотетий с коэффициентом $\frac{1}{2}$:
f_1 (неподвижная точка A(0;0)), f_2 (неподвижная точка B(1;0)) и f_3 (неподвижная точка C($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$)).

Отсюда $f_1(ABC) = AMK$, $f_2(ABC) = MBN$ и $f_3(ABC) = KNC$ (рис. 9):

$$f_1(x,y): \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}; \quad f_2(x,y): \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}; \quad f_3(x,y): \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Применяем преобразования f_1, f_2 и f_3 к полученным треугольникам AMK, MBN, KNC. Получаем ожидаемый результат.

Шаг 3. Построим «салфетку Серпинского» с помощью PascalABC, для произвольного количества итераций.

```
1       uses graphABC, crt ;
2       var k:integer;
3       procedure treug(x0,y0, x1,y1, x2,y2:real; k:integer);
4               begin
5                       line (round(x0*500)+100, -round(y0*500)+500, round(x1*500)+100,
-round(y1*500)+500);
6                       lineto (round(x2*500)+100, -round(y2*500)+500);
7                       lineto (round(x0*500)+100, -round(y0*500)+500);
8                       if k>0 then
9                               begin
10                      treug(x0/2,y0/2, x1/2,y1/2, x2/2,y2/2,k-1);
11                      treug(x0/2+0.5,y0/2, x1/2+0.5,y1/2, x2/2+0.5, y2/2,k-1);
12                      treug(x0/2+0.25,y0/2+sqrt(3)/4,x1/2+0.25,y1/2+sqrt(3)/4,x2/2+0.25,
y2/2+sqrt(3)/4, k-1);
13                              end;
14                      end;
15      begin
16              setwindowsize(700, 600);
17              write('количествоитераций: ');
18              readln(k);
19              treug(0,0, 1,0, 0.5, sqrt(3)/2,k);
20      end.
```

Программа (строки 15-20) основана на рекурсивной процедуре treug (строки 3-14) со следующими входными параметрами:

- x0, y0, x1, y1, x2, y2 – координаты вершин треугольника;

- k – нужное количество итераций.

Процедура treug рисует треугольник по заданным координатам вершин (строки 5-7) и вызывает три процедуры treug (строки 10-12), которые изображают образы исходного треугольника, полученные с помощью преобразований f_1, f_2и f_3. Переменная k уменьшается на единицу (при k=0 новые функции не вызываются).

Исследование множества «дерево Пифагора»

Шаг 1. Построение начинается с фигуры «домик» (Рис 3). Его «скаты крыши» являются основанием для двух «домиков» первой итерации. Их «скаты», в свою очередь, являются основанием для четырех «домиков» следующей итераций. Повторяя это построение бесконечно и объединяя все «приближения», получим «дерево Пифагора»

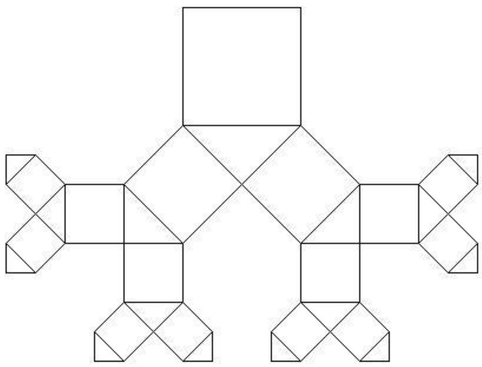

Рис. 10 Дерево Пифагора (3 итерации)

На рисунке 10 представлены результаты построения «домиков» при трех итерациях.

Шаг 2. При построении данного множества используется композиция гомотетии, поворота и параллельного переноса. Для получения следующего «приближения» нужно предыдущее сжать, повернуть и перенести как на левый, так и на правый «скат крыши», поэтому должны быть рассмотрены два случая.

Составляем формулы трех преобразований для левого «ската»: гомотетия с коэффициентом $\frac{\sqrt{2}}{2}$,поворот на 45 градусов и параллельный перенос на вектор (-1;2).Центр поворота и гомотетии совпадает с началом координат:

$$H_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}: \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} R_0^{45^\circ}: \begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} T_{(-1;2)}: \begin{cases} x''' = x'' - 1 \\ y''' = y'' + 2 \end{cases}$$

Композиция этих преобразований является искомым преобразованием:

$$T_{(-1;2)} \circ R_0^{45^\circ} \circ H_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}: \begin{cases} x''' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} - 1 \\ y''' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + 2 \end{cases}$$

Формулу для правого «ската» учащимся предлагается получить самостоятельно.

Шаг 3. Ниже представлена программа для построения «дерева Пифагора»с произвольным количеством итераций

```
uses graphABC, crt ;
var k:integer;
procedure dom(x0,y0, x1,y1, x2,y2, x3,y3, x4,y4:real; k:integer);
        begin
                line (round(x4*50)+350,-round(y4*50)+400,round(x1*50)+350,-
```

```
round(y1*50)+400);
6                 lineto (round(x2*50)+350,-round(y2*50)+400);
7                 lineto (round(x3*50)+350,-round(y3*50)+400);
8                 lineto (round(x4*50)+350,-round(y4*50)+400);
9                 lineto (round(x0*50)+350,-round(y0*50)+400);
10                lineto (round(x1*50)+350,-round(y1*50)+400);
11                if k>0 then
12                      begin
13                            dom(x0/2-y0/2-1,x0/2+y0/2+2, x1/2-y1/2-1,x1/2+y1/2+2, x2/2,
y2/2-1,x2/2+y2/2+2, x3/2-y3/2-1,x3/2+y3/2+2, x4/2-y4/2-1,x4/2+y4/2+2,k-1);
14                            dom(x0/2+y0/2+1,y0/2-x0/2+2, x1/2+y1/2+1,y1/2-x1/2+2,
x2/2+y2/2+1,y2/2-x2/2+2, x3/2+y3/2+1,y3/2-x3/2+2, x4/2+y4/2+1,y4/2-x4/2+2,k-1);
15                      end;
16          end;
17    begin
18          setwindowsize(700, 500);
19          write('количествоитераций: ');
20          readln(k);
21          dom(0,2, 1,1, 1,-1, -1,-1, -1,1 ,k);
22    end.
```

Программа (строки 17-22) основана на рекурсивной процедуре dom (строки 3-16) со следующими входными параметрами:

- x0, y0, x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4 – координаты вершин фигуры «домик»;
- k – нужное количество итераций.

Процедура dom рисует «домик» по заданным координатам вершин (строчки 5-10) и вызывает две процедуры dom (строки 13 и 14), которые изображают фигуры первой итерации. Переменная k уменьшается на единицу (при k=0 новые функции не вызываются).

Обобщая построения множеств («пыль Кантора», «салфетка Серпинского», «дерево Пифагора», «ожерелье Нефертити»), приходим к определению самоподобного фрактала, то есть указываем порождающую систему функций для каждого из множеств [1].

III. Проектная деятельность

Обучающимся были предложены темы для самостоятельного изучения с краткими аннотациями: кривая Дракона, Кривая Леви, варианты «дерева Пифагора», Кривая Минковского, I_αфрактал, «ожерелье Нефертити» (в построении опираться на Рис. 4), генерация горных ландшафтов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кириллов А. А. Повесть о двух фракталах. М, 2010. 180 с.
2. Мамалыга Р. Ф., Ахмедьянова Н. А., Корелин Д. С., Сукова Т. В. Внеурочная деятельность учащихся средней школы по формированию предпонятия «фрактал» (оригами, Лого, TurboPascal) // Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А.Н. Колмогорова: материалы международной научно-методической конференции. Кострома: КГУ им. А.Н. Некрасова, 2011. С. 34-45.
3. Мамалыга Р. Ф., Аблаев Е. В. Пропедевтика формирования понятия «фрактал» в курсе «фракталы в лого» // Образование и наука: Известия Уральского отделения Российской академии. Екатеринбург: ФГАОУ ВО «РГППУ», 2011. С. 123-133.
4. Мандельброт Б. Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и

другие чудеса. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 392 с.
5. Ожерелье Нефертити // Геометрия-Компьютер-Геометрия. URL: http://gcg-studio.ru/shkolnikam/mnozhestvo-ozherele-nefertiti.html (дата обращения: 27.04.2019).
6. Задача «Об обидчивом Пете» // Геометрия-Компьютер-Геометрия. URL: http://gcg-studio.ru/shkolnikam/zadacha-ob-obidchivom-pete.html (дата обращения: 27.04.2019).