УДК 372.800.4:371.275

Епанчинцев М.Ю., Бодряков В.Ю.

ОБУЧЕНИЕ СТАРШЕКЛАССНИКОВ АЛГОРИТМАМ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КОМПЬЮТЕРНОЙ ВЕРИФИКАЦИЕЙ

Аннотация

Задача с параметром традиционно входит в контрольные материалы единого государственного экзамена по профильной математике и оценивается в четыре первичных балла. В то же время решение функционально-параметрических задач (задач с параметром) традиционно вызывает серьезные трудности у выпускников. В статье предложен метод компьютерной верификации, как способ визуально подкрепленного научения решению функционально-параметрических задач с помощью средств ИКТ.

Ключевые слова: ЕГЭ, единый государственный экзамен, функционально-параметрические задачи, компьютерная верификация, решение задач, подготовка к экзаменам, проверка знаний, контроль знаний, методика информатики в школе.

Epanchintsev M.Yu., Bodryakov V.Yu.

HIGH SCHOOL STUDENTS LEARNING ALGORITHMS FOR SOLVING FUNCTIONAL PARAMETRIC PROBLEMS WITH COMPUTER VERIFICATION

Abstract

The problem with a parameter is traditionally included in the control materials of the Unified State Exam (USE) in the profile mathematics and is estimated at four primary points. At the same time, the solution of functional-parametric problems (problems with a parameter) traditionally causes serious difficulties for graduates. The article proposes a method of computer verification, as a way of visually supported teaching how to solve functional-parametric problems with the use of IT-tools.

Keywords: unified state exam, functional parametric tasks, computer verification, problem solving, exam preparation, knowledge test, knowledge control, computer science techniques in school.

Как показывают исследования, проводимые специалистами кафедры высшей математики и методики обучения математики Института математики, информатики и информационных технологий УрГПУ, уровень математической подготовки абитуриентов в целом неуклонно снижается (см., например, [3–8] и др.). Соответственно, все более актуальной становится задача разработки методических подходов к обучению, способствующих приведению предметной математической подготовки студентов – будущих учителей математики – к уровню, позволяющему в дальнейшем успешно осуществлять профессиональную педагогическую деятельность. Представляется, что научение уверенному решению задач с параметрами является одним из наиболее эффективных инструментов решения указанной задачи. Действительно, эти задачи позволяют четко диагностировать уровень математического и, главное, логического мышления абитуриентов, способность к осуществлению исследовательской деятельности, системное знание основных разделов школьного курса математики. Умение решать такие задачи свидетельствует о высокой математической культуре, что является предметом целевого формирования согласно Концепции развития математического образования в РФ [13].

На государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ в заданиях повышенного уровня сложности (задания С1–С7) выпускникам предлагается решить задачи с параметром С6 [10; 11; 16; 23]. Отметим, что умение решать задачи с параметром считается важным не только в отечественной, но и в зарубежной математической образовательной практике (см., например, [9; 12; 14; 15; 17; 22; 24–31] и др.). При этом эти задачи неизменно трудны для многих обучающихся и широко обсуждаются на сетевых математических образовательных форумах. Хотя научению решению таких задач уделяется большое внимание на страницах научно-методических изданий, как отмечают педагоги-исследователи, очень многие выпускники школ по-прежнему не умеют решать задачи с параметром.

ФИПИ в отчете за 2018 год (ЕГЭ по математике – профильный уровень) [16] отметил рост среднего тестового балла (далее – т.б.), который вырос на 2. При этом наибольший рост показало выполнение заданий с кратким ответом, а задания с полным решением выполнены хуже, чем в 2017 году. Так, по данным ФИПИ из общего количества участников профильного экзамена, набравших от 27 до 61 т.б. справились с заданиями повышенного уровня сложности менее 1,5% участников. В группе с хорошей подготовкой (62 – 80 т.б.) участники с наиболее сложными заданиями 16 – 19 справились в диапазоне 1,6–7%, при этом самым сложным оказалось задание с параметром. Но и для группы высокобалльников (81 – 100 т.б.) задание 18 (задача С6) оказалось одним из сложнейших.

В программе по математике средней общеобразовательной школы [21] уделяется неоправданно мало часов для изучения функционально – параметрических задач, хотя они являются важными и «дорогостоящими» (до 4-х первичных баллов) заданиями ЕГЭ. Отметим, что с параметрической зависимостью поведения функции обучающиеся сталкиваются уже при изучении свойств линейной функции

$$y = ax + b,$$

где в зависимости от действительных параметров a и b прямая $y(x)$ может возрастать или убывать, пересекать или не пересекать координатные оси и т. п. С параметрической зависимостью поведения функции обучающиеся сталкиваются и при изучении квадратичной параболы

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где в зависимости от действительных параметров a ($a \neq 0$), b и c функция $y(x)$ может иметь минимум или максимум, иметь один или два корня уравнения $y(x) = 0$ или вообще не иметь их и т. п. Фактически параметрическая обусловленность поведения функций $y(a, x)$ и соответствующих равенств и неравенств непрерывно сопровождает школьника в процессе освоения функциональной содержательно-методической линии школьного курса математики, а также сопряженных с математикой дисциплин (физика, информатика и ИКТ, статистика и др.).

Таким образом, налицо противоречие между декларируемой и фактической важностью умения понимать и решать функционально-параметрические задачи, и существующей не проработанностью методики обучения их решению. Из противоречия вытекает актуальность избранной темы исследования.

На наш взгляд в школе мало уделяется внимания задачам с параметрами, их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях или элективных курсах. Изучение происходит бессистемно и не своевременно. Обилие формул и методов, используемых при решении задач с параметрами, вызывает трудности у учащихся в понимании и прочном усвоении.

Проанализировав учебники алгебры для учащихся 7, 8, 9 классов общеобразовательных учреждений (базовый уровень) под редакцией А. Г. Мордковича мы не увидели ни одного параграфа имеющего название: «Задачи с параметрами» или «Уравнения и неравенства с параметрами». Само же понятие «параметр» и «уравнение с параметром» приведено в учебнике алгебры за 8 класс в главе 4 «Квадратные уравнения» в § 25 «Формулы корней квадратных уравнений» в таком виде [18]:

«Решить уравнение

$$x^2 - (2p + 1) \cdot x + (p^2 + p - 2) = 0.$$

Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных до сих пор квадратных уравнений тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения названы уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметрами».

В задачнике к § 25 «Формулы корней квадратных уравнений» представлено несколько заданий посвященных уравнениям с параметром. Задания сформулированы следующим образом:

1. При каких значения параметра p имеет один корень уравнение:

$$x^2 - px + 9 = 0;$$

2. Докажите, что при любом значении параметра p уравнение

$$3x^2 - px - 2 = 0.$$

имеет два корня.

Анализ учебников алгебры профильного уровня для учащихся 7–9 классов под редакцией А. Г. Мордковича показал, что задачи с параметрами безусловно присутствует в явном виде, как и часы для ее изучения. В учебнике для учащихся 8 класса с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах в главе 6 «Алгебраические уравнения» § 39 имеет название «Задачи с параметрами», число часов, отводимое на его изучение, равняется 6 [21]. В тексте параграфа разобрано 5 примеров и приведены замечания, также дано определение параметра. «Если дано уравнение $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано уравнение с параметром» [19]. В задачнике представлено 83 задания к этому параграфу. В учебнике А. Г. Мордковича для 9 класса с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах [20] в главе 1 «Неравенства с одной переменной. Системы и совокупности неравенств» имеется §7 «Задачи с параметрами» на изучение которого отведено 6 уч.ч. [21]. В параграфе разобрано 3 примера. Пример 1 – на количество корней квадратного уравнения в зависимости от параметра; пример 2 – представляет уравнение с параметром и модулем; пример 3 – система неравенств с параметром. В задачнике представлено 76 заданий к этому параграфу.

Изучение учебника алгебры под редакцией Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина и др. [1; 2] позволяет отметить следующее. При изучении темы «Уравнения с одним неизвестным» в учебнике 7 класса предлагаются задания, которые содержит задачи с параметром (№№123-125). Задания сформулированы следующим образом:

1. Подобрать число a такое, чтобы уравнение имело корни

$$\frac{a}{2}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-(x-8)$$

2. При каких значениях числа a уравнение

$|x| = a$

имеет только один (не имеет) корней.

При изучении курса алгебры в 8 классе уравнения, содержащие параметр, встречаются впервые при изучении квадратных уравнений (№№ 414, 428, 442-443, 448), а при изучении темы «квадратичная функция» авторами предлагается для рассмотрения всего два упражнения (№602 и №603), которые занесены, также, в раздел «трудные задачи» [1]. При повторении курса алгебры и начал анализа в 10 классе в системе задач не встречается заданий с параметром и можно утверждать, что в системе изучения этого курса авторы не уделяют внимания к параметру как таковому. При изучении производной авторы предлагают четыре упражнения с параметром (№№ 544-547), где дана функция, зависящая как от независимой переменной x, так и от параметра a и нужно найти значения параметра, если производная имеет определенный знак или равна нулю.

Анализ, подобный проделанному, можно было бы продолжить на примере других авторских курсов, однако уже сделанного достаточно, чтобы утверждать, что на изучение и решение функционально-параметрических задач отводится малое количество часов в учебниках алгебры профильного уровня, в прочих же учебниках уравнения и неравенства с параметрами находятся в разделе «трудных задач» или «задач повышенной сложности», и часто в обычных школах учителя из-за нехватки времени не останавливаются на решении таких задач.

Отметим также, что практически ни в одном учебнике не выделяются и не классифицируются методы решения задач с параметрами. Поэтому обучение решению этих задач смещается в область самостоятельной подготовки выпускника, причем с использованием дополнительной литературы или материалов сети Интернет, ибо, как правило, школьных учебников оказывается недостаточно. Нередко выпускник вынужден прибегать к помощи репетитора, так как самостоятельно освоить эту сложную тему весьма непросто.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример функционально-параметрической задачи из реального ЕГЭ-2018 по математике (2 вариант).

Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(x+ay-4)\cdot(x+ay-4a)=0\\ x^2+y^2=9\end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение: При a=0 первое уравнение задает параллельные прямые x = 4 и x = 0, которые не удовлетворяю условию задачи.

При a=1 первое уравнение задает единственную прямую $y = 4 - x$, которая пересекает окружность ω с центром в точке (0;0) и радиусом 3 в двух точках.

При $a \neq 1$ первое уравнение задает пару параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2, заданных уравнениями ℓ_1: $x + ay = 4$ и ℓ_2: $x + ay= 4a$, соответственно.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит исходная система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда $a \neq 1$ и окружность пересекается с каждой прямой в двух точках.

Число точек пересечения окружности с прямой ℓ_1 равно числу корней квадратного уравнения:

$$(a^2 + 1)y^2 - 8ay + 7 = 0,$$

полученного из уравнения окружности после исключения переменной $x = 4 - ay$. Это уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте:

$$64a^2 - 4\cdot(a^2+1)\cdot 7 > 0;\ (3a-\sqrt{7})\cdot(3a+\sqrt{7}) > 0,$$

откуда получаем, что либо $a < -\frac{\sqrt{7}}{3}$, либо $a > \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Аналогично, число точек пересечения окружности с прямой ℓ_2 равно число корней квадратного уравнения:

$(a^2+1)y^2 - 8a^2y + (16a^2-9) = 0.$

Данное уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте

$-28a^2 + 36 > 0$

$(\sqrt{7}a-3)\cdot(\sqrt{7}a+3) < 0,$

откуда $-\frac{3\sqrt{7}}{7} < a < \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Таким образом, исходная система уравнений (1) имеет четыре решения при $-\frac{3\sqrt{7}}{7} < a < -\frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3} < a < 1; 1 < a < \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Ответ: $-\frac{3\sqrt{7}}{7} < a < -\frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3} < a < 1; 1 < a < \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Комментарий: Видно, что приведенная задача может быть решена аналитически обучающимся, уверенно владеющим алгоритмом решения задач с параметром. Однако существует проблема научения обучающегося алгоритмам решения функционально-параметрических задач.

По нашему мнению, применение визуализирующих ИТ-технологий, когда на экране монитора школьник может непосредственно наблюдать результат «действия» изменяемого им параметра a, может стать эффективным средством научения решению задач с параметром. Это действие наглядно выражается в трансформации и изменении относительного положения графиков функций на экране, например, в среде электронной таблицы MS Excel. После наработки устойчивых и подкрепленных компьютерной визуализацией алгоритмических навыков аналитического решения параметрических задач от помощи компьютера можно постепенно отказаться (гипотеза исследования), ограничиваясь лишь выборочной компьютерной верификацией теоретических расчетов. Под компьютерной верификацией понимается «эмпирическое» подтверждение аналитического решения функционально-параметрической математической задачи.

Рассмотрим на примере решения системы (1) метод компьютерной верификации, обращая при этом внимание на особенности данного решения.

При решении системы (1) в первую очередь было определено, что 1 является контрольным значением параметра и при подстановке $a=1$ первое уравнение задает прямую $y=x+4$ которая пересекает окружность с центром в точке (0;0) и радиусом 3 в двух точках. Подразумевается, что на данном этапе в Excel ученик построит объекты и увидит, что при $a = 1$ не выполняется условие задачи (рис. 1).

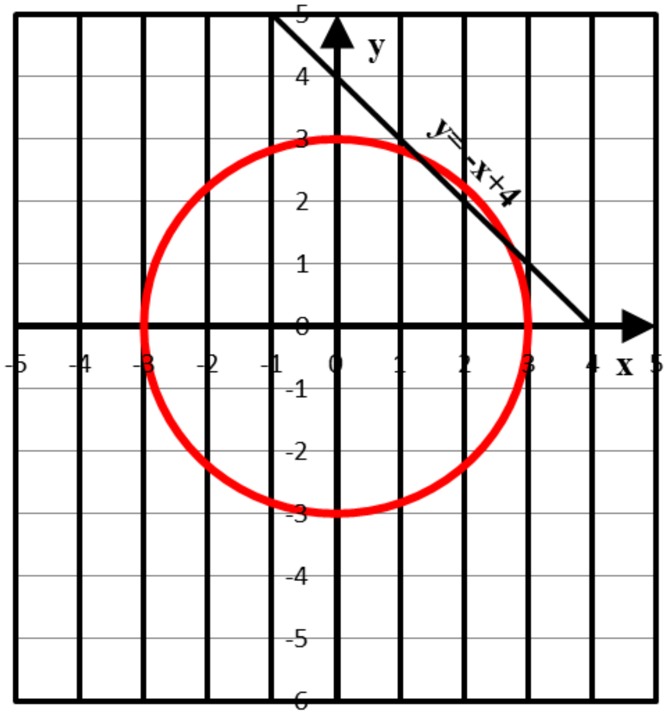

Рис. 1. Изображение окружности ω
и прямой y = –x + 4, при a = 1.

Далее обучающиеся рассматривают случай при $a \neq 1$, где приходят к выводу, что уравнение задает пару параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2, заданных уравнениями $x + ay = 4$ и $x + ay = 4a$ соответственно. В этом случае использование функций excel будет уместно, поскольку ученик сможет проследить как меняется график функции в зависимости от параметра a.

При $a = 2$ прямые ℓ_1 и ℓ_2 примут вид $y = -0{,}5x + 2$ и $y = -0{,}5x + 4$, соответственно. Тогда график функции будет выглядеть следующим образом (рис. 2)

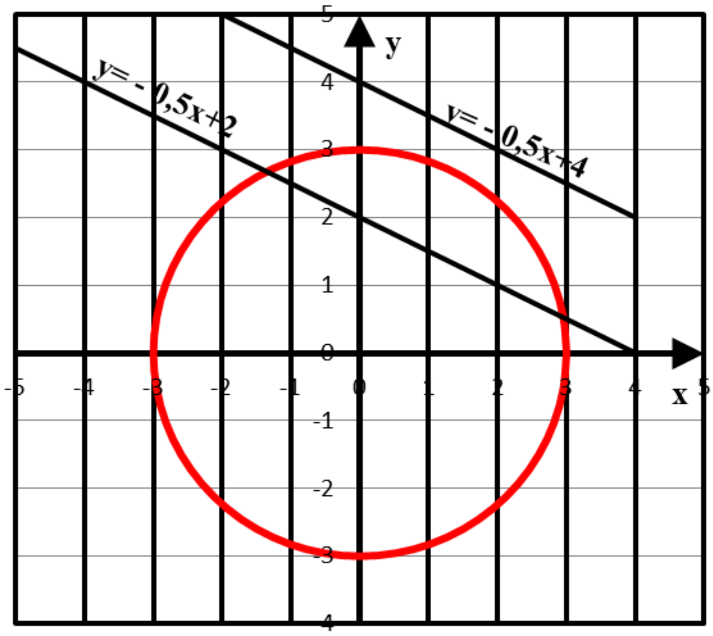

Рис. 2. Изображение окружности ω
и прямых ℓ_1 и ℓ_2, при a = 2

При $a = -1$ прямые ℓ_1 и ℓ_2 примут вид $y = x - 4$ и $y = x + 4$ соответственно. Тогда график функции будет выглядеть следующим образом (рис. 3):

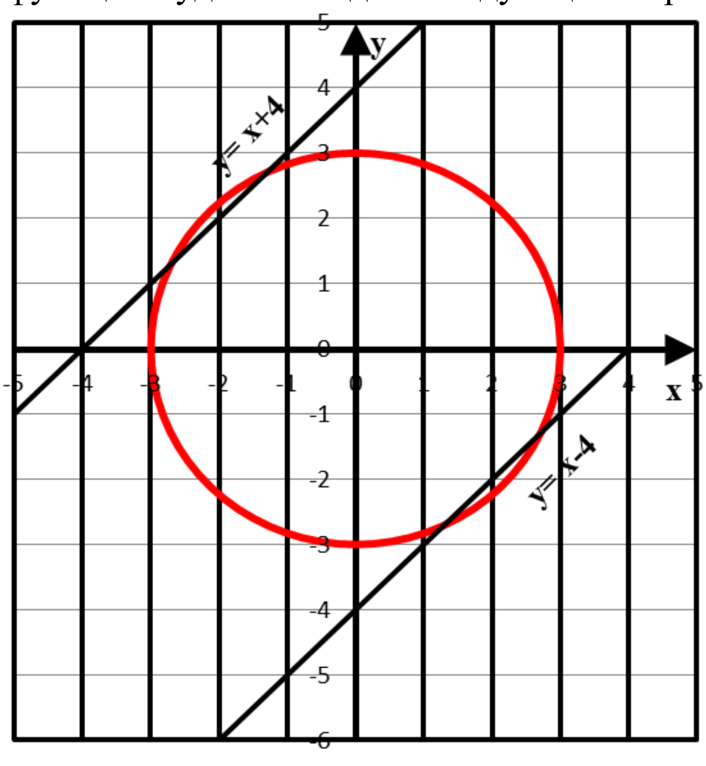

Рис. 3. Изображение окружности ω
и прямых y = x – 4 и y = x + 4, при a = -1

При $a = -2$ прямые ℓ_1 и ℓ_2 примут вид $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}5x + 4$, соответственно. Тогда график функции будет выглядеть следующим образом (рис. 4):

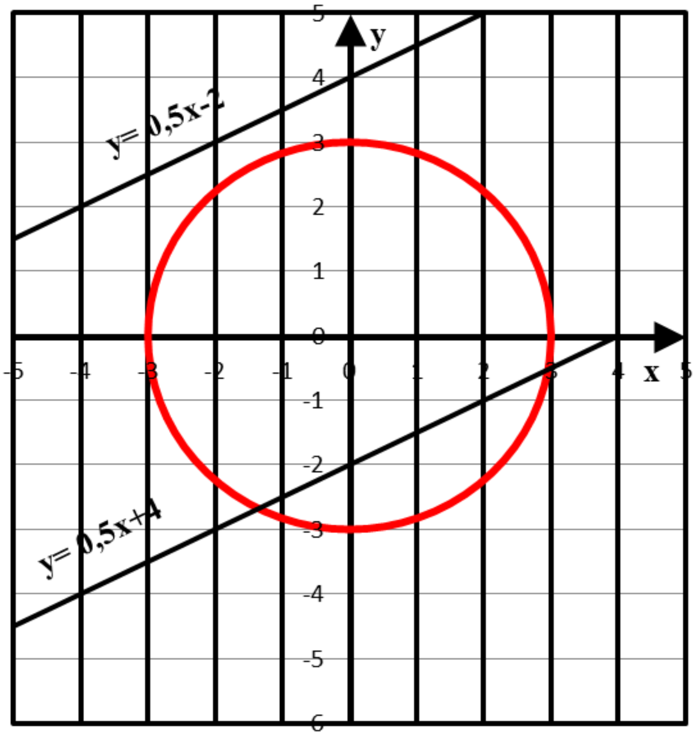

Рис. 4. Изображение окружности ω и прямых ℓ_1 и ℓ_2, при $a = -2$

Из представленных рассуждений и графиков, построенных с помощью MS Excel, учащиеся приходят к выводу, что значение параметра *a* должно быть таким, чтобы прямые пересекали окружность в четырех точках. Однако существуют значения параметра *a,* при которых прямые лишь касаются окружности ω (пересекаются с ней в единственной точке) или вообще не пересекаются с ней. Как показал наш пробный эксперимент, обучающиеся уже без особенных затруднений проделывают преобразования, приводящие к верному ответу. В дальнейшем, при решении функционально-параметрических задач обучающиеся научаются реализовывать усвоенный алгоритм действий уже и без помощи компьютера.

Можно утверждать, что творческие, интересные задания способствуют повышению мотивации к учению, включению ученика в деятельность на добровольных началах. На занятиях формируется положительная мотивация детей, осуществляется эмоционально-психологический настрой на деятельность и мобилизация внимания учащихся. В связи с этим стоит отметить, что метод компьютерной верификации является средством повышения и систематизации уровня знаний, благодаря которым обучающиеся лучше усваивают алгоритм решения функционально-параметрических задач, причем, в будущем они смогут (в реальных условиях сдачи ЕГЭ) обходиться уже без компьютера.

В заключение отметим, что применение визуализирующих информационных технологий, когда на экране монитора школьник или студент – будущий учитель математики может непосредственно наблюдать результат «действия» изменяемого им параметра *a* на функции с параметром, служит эффективным средством научения решению задач с параметром и алгоритмического освоения соответствующих учебных действий. После наработки устойчивых алгоритмических навыков подкрепленных компьютерной визуализацией решения функционально-параметрических задач от помощи компьютера можно постепенно отказаться. Апробированную таким образом практику научения решению задач с параметром мы считаем необходимым внедрить в регулярный процесс предметной математической подготовки студентов математического и сопряженных с ним направлений подготовки (информатика, физика).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. 19 изд. М.: Просвещение, 2016.
2. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др. Алгебра 7 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений. 19 изд. М.: Просвещение, 2016.
3. Бодряков В. Ю., Фомина Н. Г. «ЕГЭ» тестирование студентов-математиков педагогического вуза как важный индикатор уровня профессиональной подготовленности // Alma mater. 2009. № 1. С. 50-54.
4. Бодряков В. Ю., Фомина Н. Г. О качестве математической подготовки учащихся в комплексе «школа – вуз»: взгляд с позиций работника высшего педагогического образования // Математика в школе. 2010. № 2. С. 56-62.
5. Бодряков В. Ю. Об одной насущной проблеме математического педагогического образования учителей // Математика в школе. 2013. № 7. С. 32-40.
6. Бодряков В. Ю., Воронина Л. В. Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения // Педагогическое образование в России. 2018. № 2. С. 15-27.
7. Кузовкова А. А., Мамалыга Р. Ф., Бодряков В. Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. 2018. № 2. С. 35-42.
8. Бодряков В. Ю. Когнитивно-деятельностный подход в обучении математике // Когнитивные исследования в образовании: сб. науч. ст. / Урал. гос. пед. ун-т; под науч. ред. С. Л. Фоменко; общ. ред. Н. Е. Поповой. Екатеринбург, 2019. 435 с. С. 101-108.
9. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. 3. изд., доп. и перераб. Сер. Кладовая школьной математики. М.: Илекса, 2003. 326 с.
10. Демоверсии, спецификации, кодификаторы // «Федеральный институт педагогических измерений». URL: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 01.04.2019).
11. ЕГЭ и ГИА по математике // Alexlarin.net. URL: http://alexlarin.net/ege19.html (дата обращения: 02.03.2019).
12. Зеленский А. С., Панфилов И. И., Панфилова Е. А. Задачи с параметром на ЕГЭ-2017 // Математика в школе. 2018. № 1. С. 8-18.
13. Концепция развития математического образования в Российской Федерации: утв. расп. Правительства РФ от 24.12.2013. № 2506-р.
14. Лавренченко С. А., Магомедов А. М., Згонник Л. В. Задачи с параметрами и биномиальные тождества // Математика в школе. 2018. № 6. С. 16-26.
15. Малова И. Е., Сенчурова Г. П. Обогащающий анализ текстов реше-

ния заданий с параметрами // Математика в школе. 2018. № 2. С. 43-52.
16. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года / Федеральный институт педагогических измерений. URL: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1535625213/matematika_2018.pdf (дата обращения: 05.03.2019).
17. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.: Экзамен, 2009. 286 с.
18. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс: в 2 ч.. М.: Мнемозина, 2009. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 215 с.
19. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. М.: Мнемозина, 2016. 240 с.
20. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. М.: Мнемозина, 2016. 255 с.
21. Программы. Математика. 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. М.: Мнемозина, 2016. 63 с.
22. Прокофьев А. А. Задачи с параметром на ЕГЭ-2018 // Математика в школе. 2018. № 8. С. 11-24.
23. Ученику // Решу ЕГЭ: «Образовательный портал для подготовки к экзаменам». URL: https://math-ege.sdamgia.ru/manual (дата обращения: 20.03.2019).
24. Фалилеева М. В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами // Фундаментальные исследования. 2013. Т. 5. №. 4. С. 1230-1235.
25. Bishop S., John A. Teaching High School Student Parametric Functions Through Covariation. Tempe (USA): Arizona State University, 2008. 49 p.
26. Drier H. S. Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets // School Science and Mathematics. 2001. V. 101. № 4. P. 170-179.
27. Garofalo J., Drier H., Harper S., Timmerman M.A., Shockey T. Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation // Contemporary Issues in Technology and Teacher Education. 2000. V. 1. № 1. P. 66-88.
28. Connally E., Hughes-Hallett D., Gleason A. M., Cheifetz P., Davidian A., Flath D. E., Lozano G. I. Functions modeling change: A preparation for calculus. Wiley, 2011.
29. Math10.com. URL: https://www.math10.com/en/algebra/parametric-equations.html (дата обращения: 12.04.2019).
30. Zakirova V. G., Zelenina N. A., Smirnova L. M., Kalugina O. A. Methodology of Teaching Graphic Methods for Solving Problems with Parameters as a Means to Achieve High Mathematics Learning Outcomes at School // EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2019. № 15(9). P. em1741.
31. П_My_Math_Forum. URL: http://mymathforum.com/algebra/28272-parametric-system-equation-problem.html (дата обращения: 12.04.2019).