

ШКОЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 372.851:371.275
ББК 4426.221-28

DOI 10.26170/po19-03-03
ГРНТИ 14.25.09

Код ВАК 13.00.02

Бондарь Александр Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике, Уральский государственный педагогический университет; 620075, г. Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 9; e-mail: a.-bondar@mail.ru

Мамалыга Раиса Федоровна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике, Уральский государственный педагогический университет; 620075, г. Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 9; e-mail: gcg45@mail.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕГЭ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространственное мышление; стереометрия; ЕГЭ; единый государственный экзамен; проверка знаний; подготовка к экзаменам; контроль знаний; экзаменационные задачи; стереометрические задачи; решение задач; информационные технологии.

АННОТАЦИЯ. В статье проанализированы причины невысоких результатов, показанных выпускниками школ при решении стереометрических задач на профильном едином государственном экзамене по математике. Одной из основных причин неудач авторы считают низкий уровень пространственного мышления обучаемых. В подтверждение этого мнения проведено тестирование уровня пространственного мышления выпускников школ 2018 г. Дальнейший сравнительный анализ полученных данных с результатами исследования, выполненного в 2005 г. одним из авторов, продемонстрировал ухудшение значений всех его показателей. В статье рассмотрены основные факторы, влияющие на формирование пространственного мышления обучаемых при изучении школьного курса геометрии на примере раздела *Перпендикулярность прямых и плоскостей*. Обзор школьных учебников геометрии показал, что несоблюдение принципа варьирования существенных признаков создает предпосылки к тому, что ключевые понятия перпендикуляра, проекции, угла между прямой и плоскостью не будут сформированы в достаточной степени. А проведенный эксперимент со студентами первого курса направления подготовки «Педагогическое образование: профиль Математика и информатика» подтвердил это положение. Для решения выявленных проблем авторами предложена серия задач ЕГЭ и предваряющие ее упражнения по формированию ключевых понятий стереометрии: проекция прямой на плоскость, перпендикулярность прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью. В работе на примере применения программы динамического моделирования Geogebra показано, как можно продемонстрировать геометрический образ рассматриваемых понятий при различных положениях плоскости изображения. При решении предложенной серии задач используется геометрический подход, при этом выделяются аспекты формирования пространственного мышления в той его части, которая связана с оперированием трехмерными образами: изменением его положения и структуры.

Bondar Alexander Alexandrovich,

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

Mamalyga Raisa Fedorovna,

Candidate of Pedagogy, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

FORMATION OF THE SPATIAL THINKING PUPILS OF 10-11 GRADES IN THE PROCESS OF SOLVING THE UNIFIED STATE EXAMINATION (UST) STEREOMETRIC TASKS

KEYWORDS: spatial thinking; stereometry; Unified State Exam; knowledge check; exam preparation; knowledge control; exam tasks; stereometric tasks; problem solving; information Technology.

ABSTRACT. The article analyzes the reasons for the low results shown by school graduates in solving stereometric problems in the UST in mathematics. The authors consider the low level of spatial thinking of the trainees to be one of the main reasons for the failures. In support of this opinion, a test of the spatial thinking of high school graduates in 2018 was conducted. A further comparative analysis of the data obtained with the results of a study carried out in 2005 by one of the authors demonstrated a deterioration in the values of all of its indicators. The article discusses the main factors influencing the formation of spatial thinking of students in the study of the school course of geometry on the example of the section *Perpendicularity of lines and planes*. A review of school geometry textbooks showed that not adhering to the principle of varying essential features creates prerequisites to the fact that the key concepts of the perpendicular, the projection, the angle between the straight line and the plane will not be formed sufficiently. The experiment conducted with first-year students of the "Pedagogical Education: Mathematics and Computer Sci-

ence” profile confirmed this point. To solve the identified problems, the authors proposed a series of UST tasks and exercises to formulate the key concepts of stereometry: the projection of a straight line onto a plane, perpendicularity of a straight line and a plane, the angle between a straight line and a plane. In this paper, using the example of the application of the dynamic modeling program Geogebra, it is shown how it is possible to demonstrate the geometrical image of the concepts under consideration at different positions of the image plane. When solving the proposed series of tasks, the geometrical approach is used, while highlighting aspects of the formation of spatial thinking in the part that is associated with operating three-dimensional images: changing its position and structure.

Актуальность проблемы

Рост объема информации, радикальное изменение характера ее передачи и восприятия, ограниченность временного ресурса процесса обучения не могут не влиять на требования к качеству любого уровня образования. Поиск новых приемов, форм и более эффективных средств обучения, современных методов оценивания знаний неразрывно связан с компьютеризацией всех элементов и этапов учебного процесса. Так, например, авторами в статьях [2; 3] рассмотрено применение ИКТ в проектной деятельности при изучении стереометрии. В данной статье проведено дальнейшее исследование возможностей применения ИКТ для развития пространственного мышления обучаемых.

«Наибольшие перспективы открываются в использовании информационных тех-

нологий при обучении геометрии для целей имитационного моделирования, которое создает условия для развития мышления» [15, с. 550], в частности, пространственного.

Исследования, проведенные И. Я. Каплуновичем и И. С. Якиманской в 80-90 годах, показали, что в мыслительной деятельности обучающегося при создании динамического образа происходят более сложные процессы, чем при создании статического образа. Обсуждая вопросы формирования этого психического процесса, они отмечают, что школьное образование в должной мере с этой задачей не справляется [7; 8; 13]. Нижеприведенные результаты (таблица 1) выполнения контрольно-измерительных материалов по стереометрии за 2016 и 2017 гг. [11] косвенным образом показывают, что на данный момент этот вопрос остается по-прежнему актуальным.

Таблица 1

Анализ результатов выполнения отдельных заданий по геометрии

№ задания КИМ	Требования (умения), проверяемые заданиями	% выполнения заданий	
		ЕГЭ 2016	ЕГЭ 2017
№8	Решать простейшие стереометрические задачи	51,5	57,5
№16	Решать простейшие планиметрические задачи; моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать полученные модели; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин	0,31	1,4

С целью выявления уровня пространственного мышления у выпускников школ 2018 г., поступивших в вузы Екатеринбурга на специальности математика, геофизика, филология, было организовано тестирование. Мы воспользовались тестом пространственного мышления (авторы — И. С. Якиманская, В. Г. Зархин, Н. Х. Кадаяс) [15]. Средний балл подсчитывался по каждой группе испытуемых. Максимальный показатель составлял 30 баллов. На рисунке 1 представлены итоги сравнительного анализа результатов исследования, выполненного одним из авторов в 2005 г. (см. диссертация [9]), с результатами тестирования выпускников 2018 г.

В таблице 2 дана краткая характеристика теста.

Нами проведен дальнейший анализ выполненных работ с заданиями на:

- определение размеров фигуры и формы объекта;
- установление типов оперирования образами.

Для этого вычислялся средний показатель по субтесту. Максимальный суммарный балл по субтесту равняется шести. На рисунке 2 представлены результаты теста студентов (150 человек) 1 курса 2005 и 2018 годов обучения.

Из рисунка 1 видно, что за указанный промежуток времени у всех участников исследования произошло снижение средних показателей, то же происходит и по всем субтестам (рис. 2).



Рис. 1. Средние показатели выполнения студентами заданий ТПМ

Таблица 2

Структура теста пространственного мышления

Процесс создания образа	
1 субтест	работа с размерами объектов
2 субтест	работа с формой объекта
Фиксация типов оперирования образом	
3 субтест	мысленное видоизменение положения объекта
4 субтест	мысленное видоизменение структуры объекта
5 субтест	одновременное изменение пространственного положения и структуры образа



Рис. 2. Средние показатели по субтестам

Вопрос изучения уровней пространственного мышления и способов его развития является актуальными и за рубежом. Так, в работе [16] отмечается, что одной из самых важных когнитивных способностей в STEM (science, technology, engineering, and mathematics) образовании является пространственное мышление, однако понимание того, как студенты используют эту способность на практике, в настоящее время, не достаточно изучено. В обзоре [17] рассмотрены подходы к моделированию связи между пространственным и математическим мышлением в процессе их развития; наме-

чены виды исследований, которые могут помочь понять механизмы связи пространственного и математического мышления.

Методический анализ

Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования одной из основных целей изучения школьного курса геометрии ставит формирование пространственного мышления [12]. По мнению авторов, изучение таких ключевых понятий стереометрии, как перпендикулярность, проекция, угол между прямой и плоскостью, не может не сказаться на его

формировании. Однако анализ школьных программ по геометрии показывает, что на их изучение отводится не более трех часов. При этом в учебниках по геометрии [4; 5] теоретический материал по указанным темам сопровождается однотипными иллюстрациями, в частности, построение проекции диагонали многогранника практически всегда выполняется на его нижнее основание. Обзор учебников [4; 5] показал, что из приведенных 18 проекций только одна была представлена на боковой грани. Всего в трех задачах (№ 225, 232, 306) из учебника [4] предлагается отметить проекцию прямой на боковую грань. Это является предпосылками к тому, что ключевые понятия перпендикуляра, проекции, угла между прямой и плоскостью не будут сформированы, поскольку не соблюдается принцип варьирования существенных признаков [9]. Проведенный эксперимент со студентами первого курса направления подготовки «Педагогическое образование: профиль Математика и информатика» (27 человек) показал, что только восемь человек применили ортогональное проектирование на боковую грань. И этот выбор объясняется тем, что они не могут:

а) правильно выбрать плоскость изображения (направление ортогонального проектирования);

б) реализовать алгоритм проектирования при «нестандартном» расположении плоскости изображения;

в) логически обосновать правильность изображения проекции.

Однако использование программ динамического моделирования (например Geogebra, Maple, Mathematica, Mathcad) на этих же уроках без особых временных затрат позволяет продемонстрировать геометрический образ рассматриваемых понятий при различных положениях плоскости изображения. Например, при решении задачи «Найти углы, которые образует диагональ прямоугольного параллелепипеда со всеми боковыми гранями, если известны все три его измерения». Учитель демонстрирует проекцию диагонали AC_1 на основание $ABCD$ (стандартное изображение, см. рис. 3а), показывает, что параллелепипед $A'B'C'D'A_1B_1C_1D_1$ (рис. 3б) получен при повороте параллелепипеда $ABCD_1B_1C_1D_1$ вокруг оси OO_1 на угол в 90° по часовой стрелке. При этом он акцентирует внимание на том, что этапы построения проекции на боковую грань не отличаются от этапов построения «стандартной проекции» на основание.

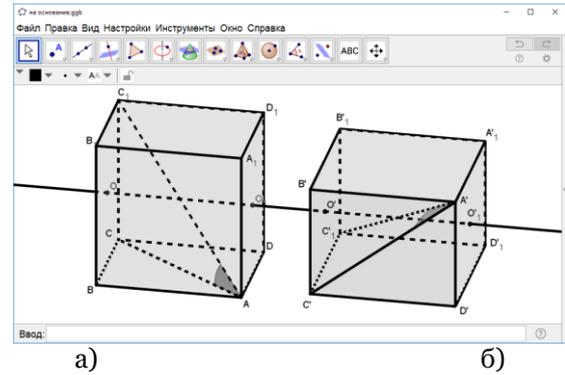


Рис. 3. Этапы построения проекций на боковые грани

Рисунок 4 является продолжением предыдущих этапов и иллюстрирует три проекции указанной диагонали.

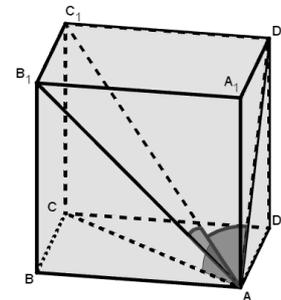


Рис. 4. Изображение 3-х проекций диагонали AC_1

Изменение положения плоскости изображения позволяет правильно выделить характеристические свойства понятия «проекция прямой на плоскость». Завершаются эти три упражнения следующим тестовым заданием: *В правильной треугольной пирамиде $ABCD$, у которой все ребра равны, укажите, какой из отрезков является проекцией отрезка MB на боковую грань BDC , если M — середина AD , а $DL=LH=HK=CK$. а) BK ; б) BH ; в) BL ; г) BD . И обратная задача: Проекцией какого из отрезков является отрезок BH ? а) BM ; б) AB ; в) MH ; г) AC .*

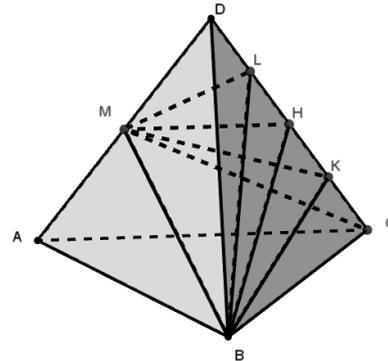


Рис. 5. Иллюстрация к тестовому заданию

В случае возникновения у обучаемых затруднений в решении тестовых заданий учитель рекомендует им мысленно повернуть пирамиду на основание BDC .

Такие упражнения способствуют формированию умения переструктурирования пространственного образа. Для более углубленного изучения предложенного метода ортогонального проектирования на боковые грани может быть рассмотрена следующая задача [1, с. 36]: «В правильной четырехугольной пирамиде $FABCD$ найти угол между прямой AE и плоскостью FBC , где E — середина FD », решение которой, путем удвоения, сводится к предыдущей тестовой задаче (см. рис. 6). Пирамида $F'A'B'C'D'$ является образом при параллельном переносе пирамиды $FABCD$ на вектор \overline{AB} . Угол между прямой AE и гранью FBC совпадает с углом между $A'E'$ и гранью FBC . Таким образом, задача опирается на решение приведенного выше тестового задания.

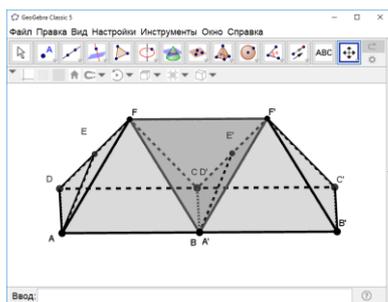


Рис. 6. Удвоение пирамиды

Ниже предложена серия задач формата ЕГЭ [6; 10], решение которых в открытом доступе в большинстве случаев выполнено с применением векторной алгебры. Сформированное понятие проекции и умение переструктурировать образ позволяет упростить решения этой серии задач.

1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом

- а) докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны;
- б) найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC=4$, $BC=7$.

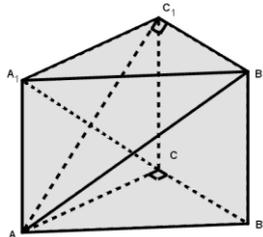


Рис. 7. Иллюстрация к задаче №1

Для доказательства перпендикулярности целесообразно выполнить проекцию AB_1 на грань ACC_1A_1 (рис. 7).

2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, основание которой — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетом BC , вдвое большим бокового ребра призмы. Точка M — середина ребра A_1C_1 , точка N лежит на ребре BC , причём $CN : NB = 1 : 3$.

- а) докажите, что $MN \perp CB_1$;
- б) найдите угол прямой MN с плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{7}$.

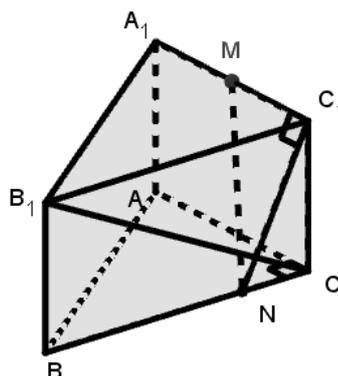


Рис. 8. Иллюстрация к задаче № 2

Для доказательства перпендикулярности целесообразно выполнить проекцию MN на грань BCC_1B_1 (рис. 8).

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1

- а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны;
- б) найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

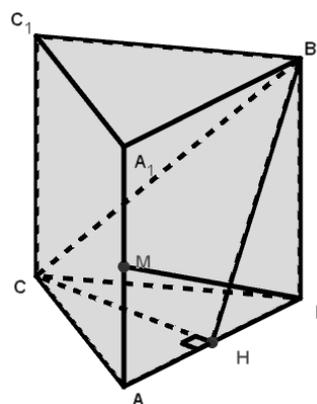


Рис. 9. Иллюстрация к задаче № 3

Для доказательства перпендикулярности целесообразно выполнить проекцию CB_1 на грань ABB_1A_1 (рис. 9).

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AD = 2$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра $C_1 D_1$, точка N лежит на ребре AA_1 , причём $AN = 3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани $BB_1 C_1 C$.

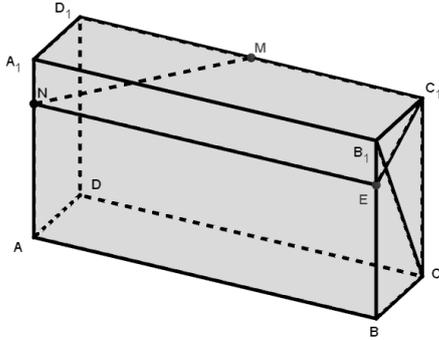


Рис. 10. Иллюстрация к задаче № 4

Для доказательства перпендикулярности целесообразно выполнить проекцию MN на грань $BCC_1 B_1$ (рис. 10).

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 12, а высота 3. Точка K — середина BC , точка L лежит на стороне $A_1 B_1$ так, что $B_1 L = 5$. Точка M — середина $A_1 C_1$. Через точки K и L проведена плоскость, параллельная прямой AC .

а) Доказать, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB .

ЛИТЕРАТУРА

1. Балаян Э. Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ: 10-11 классы. — Ростов н/Д.: Феникс, 2013. — 216 с.
2. Бондарь А. А., Мамалыга Р. Ф. Проект «Куб принца Руперта» и формирование пространственного мышления обучающихся 10-11 классов // Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам: мат-лы Всерос. науч.-практ. конф. (г. Екатеринбург, 2-3 апреля 2018 г.) / Урал. гос. пед. ун-т; отв. ред. Т. Н. Шамало. — Екатеринбург: [б. и.], 2018. — С. 43-48.
3. Бондарь А. А., Мамалыга Р. Ф., Мысина М. А. Опыт организации проектной деятельности при изучении стереометрии с использованием ИКТ // Новые информационные технологии в образовании и науке. — 2018. — Вып. 1. — С. 55-59.
4. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2008. — 255 с.
5. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: Мнемозина, 2008. — 288 с.
6. Задачи по геометрии [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://zadachi.mcsme.ru> (дата обращения: 08.07.2018).
7. Каплунович И. Я. О психологических различиях мышления двумерными и трёхмерными образами // Вопросы психологии. — 2003. — № 3. — С. 66-77.
8. Каплунович И. Я. Показатели развития пространственного мышления у школьников // Вопросы психологии. — 1981. — № 5. — С. 155-161.
9. Мамалыга Р. Ф. Развитие пространственного мышления у студентов педагогического вуза при формировании понятий в курсе геометрии: дис. ... канд. пед. наук. — Екатеринбург, 2005.
10. РЕШУ ЕГЭ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://math-ege.sdangia.ru/> (дата обращения: 08.07.2018).
11. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy> (дата обращения: 08.07.2018).
12. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования [Электронный ресурс] / Министерство образования и науки Российской Федерации. — Режим доступа: <https://минобрнауки.рф/документы/543> (дата обращения: 08.07.2018).

б) Найти объем пирамиды с вершиной в точке B , основанием которой является сечение призмы плоскостью.

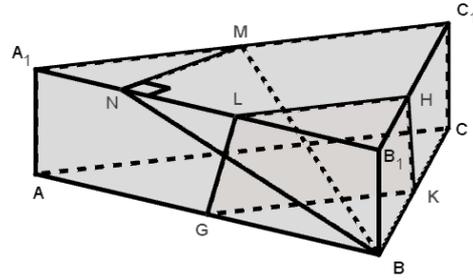


Рис. 11. Иллюстрация к задаче № 5

Для доказательства перпендикулярности в пункте а) имеет смысл рассматривать проектирование MB на боковую грань $ABB_1 A_1$ или $BCC_1 B_1$ (рис. 11).

Заключение

Предложенные авторами упражнения, тестовые задания, решение серии задач ЕГЭ и компьютерные средства способствуют более эффективному выделению характеристических свойств понятий: проекция, перпендикулярность, угол между прямой и плоскостью. В дальнейшем их использование расширяет класс задач, решаемых геометрическими методами, что способствует формированию пространственного мышления, таких важных составляющих его, как движение и изменение структуры ментального образа.

13. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников / НИИ общ. и пед. психологии, АПН СССР. — М. : Педагогика, 1980. — 240 с.
14. Юсупов Р. М., Отабеков А. О., Маматкулова У. Э. Дидактические возможности использования информационных технологий в процессе обучения геометрии в общеобразовательной школе [Электронный ресурс] // Молодой ученый. — 2013. — № 12. — С. 548-551. — Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/59/8562/> (дата обращения: 07.07.2018).
15. Якиманская И. С., Зархин В. Г., Кадаяс Х. Х. Тест пространственного мышления: опыт разработки и применения // Вопросы психологии. — 1991. — № 1. — С. 128-134.
16. Buckley J., Seery N. & Canty D. Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving [Electronic resource] // International Journal of Technology and Design Education. — 2018. — Mode of access: <https://doi.org/10.1007/s10798-018-9446-3>.
17. Young C. J., Levine S. C. & Mix K. S. The Connection Between Spatial and Mathematical Ability Across Development [Electronic resource] // Frontiers in Psychology. — 2018. — № 9. — Mode of access: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00755>.

REFERENCES

1. Balayan E. N. Geometriya: zadachi na gotovykh chertezhakh dlya podgotovki k EGE: 10-11 klassy. — Rostov n/D. : Feniks, 2013. — 216 s.
2. Bondar' A. A., Mamalyga R. F. Proekt «Kub printsa Ruperta» i formirovanie prostranstvennogo myshleniya obuchayushchikhsya 10-11 klassov // Formirovanie myshleniya v protsesse obucheniya estestvennonauchnym, tekhnologicheskim i matematicheskim distsiplinam : mat-ly Vseros. nauch.-prakt. konf. (g. Ekaterinburg, 2-3 aprelya 2018 g.) / Ural. gos. ped. un-t ; otv. red. T. N. Shamalo. — Ekaterinburg : [b. i.], 2018. — S. 43-48.
3. Bondar' A. A., Mamalyga R. F., Mysina M. A. Opyt organizatsii proektnoy deyatel'nosti pri izuchenii stereometrii s ispol'zovaniem IKT // Noveye informatsionnye tekhnologii v obrazovanii i nauke. — 2018. — Vyp. 1. — S. 55-59.
4. Geometriya. 10-11 klass : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy (bazovyy i profil'nyy urovni) / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev [i dr.]. — 17-e izd. — M. : Prosveshchenie, 2008. — 255 s.
5. Geometriya. 10-11 klass : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy (bazovyy i profil'nyy urovni) / I. M. Smirnova, V. A. Smirnov. — 5-e izd., ispr. i dop. — M. : Mnemozina, 2008. — 288 s.
6. Zadachi po geometrii [Elektronnyy resurs]. — Rezhim dostupa: <http://zadachi.mccme.ru> (data obrashcheniya: 08.07.2018).
7. Kaplunovich I. Ya. O psikhologicheskikh razlichiyakh myshleniya dvumernymi i trekhmernymi obrazami // Voprosy psikhologii. — 2003. — № 3. — S. 66-77.
8. Kaplunovich I. Ya. Pokazateli razvitiya prostranstvennogo myshleniya u shkol'nikov // Voprosy psikhologii. — 1981. — № 5. — S. 155-161.
9. Mamalyga R. F. Razvitie prostranstvennogo myshleniya u studentov pedagogicheskogo vuza pri formirovanii ponyatiy v kurse geometrii : dis. ... kand. ped. nauk. — Ekaterinburg, 2005.
10. REShU EGE [Elektronnyy resurs]. — Rezhim dostupa: <https://math-ege.sdmgia.ru/> (data obrashcheniya: 08.07.2018).
11. Federal'nyy institut pedagogicheskikh izmereniy [Elektronnyy resurs]. — Rezhim dostupa: <http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy> (data obrashcheniya: 08.07.2018).
12. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nye standart obshchego obrazovaniya [Elektronnyy resurs] / Ministerstvo obrazovaniya i nauki Rossiyskoy Federatsii. — Rezhim dostupa: <https://minobrnauki.rf/dokumenty/543> (data obrashcheniya: 08.07.2018).
13. Yakimanskaya I. S. Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov / NII obshch. i ped. psikhologii, APN SSSR. — M. : Pedagogika, 1980. — 240 s.
14. Yusupov R. M., Otabekov A. O., Mamatkulova U. E. Didakticheskie vozmozhnosti ispol'zovaniya informatsionnykh tekhnologiy v protsesse obucheniya geometrii v obshcheobrazovatel'noy shkole [Elektronnyy resurs] // Molodoy uchenyy. — 2013. — № 12. — S. 548-551. — Rezhim dostupa: <https://moluch.ru/archive/59/8562/> (data obrashcheniya: 07.07.2018).
15. Yakimanskaya I. S., Zarkhin V. G., Kadayas Kh. Kh. Test prostranstvennogo myshleniya: opyt razrabotki i primeneniya // Voprosy psikhologii. — 1991. — № 1. — S. 128-134.
16. Buckley J., Seery N. & Canty D. Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving [Electronic resource] // International Journal of Technology and Design Education. — 2018. — Mode of access: <https://doi.org/10.1007/s10798-018-9446-3>.
17. Young C. J., Levine S. C. & Mix K. S. The Connection Between Spatial and Mathematical Ability Across Development [Electronic resource] // Frontiers in Psychology. — 2018. — № 9. — Mode of access: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00755>.